Parametrixmethode
zur Lösung von Randwertproblemen

Teil 2

Bildung und Eigenschaften der Parametrix

Fortsetzung der Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Vorgelegt von

Ludwig Sauer
aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main 1942

1. Gutachter: Prof. Dr. Threlfall

2. Gutachter: Prof. Dr. Madelung

Tag der mündlichen Prüfung: 23. September 1940

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

D 30

Sonderabdruck aus Band 119, Heft 1 der Mathematischen Annalen

Springer-Verlag, Berlin W9

Teil 2.

Bildung und Eigenschaften der Parametrix.

Die vorliegende Arbeit setzt inhaltlich und formal (fortlaufende Bezeichnung der Nummern, Formeln usw.) die Parametrixmethode Teil 1, Auflösung von Integralgleichungen zweiter Art, Math. Annalen 118 (1942), S. 385—440, fort. Im übrigen verweise ich auf die Vorbemerkung des ersten Teiles. Die nachfolgenden Literaturhinweise beziehen sich auf das im Teil 1 zwischen Vorbemerkung und Nr. 1 zusammengestellte Literaturverzeichnis.

Teil 1 brachte zuerst den Abschnitt I: „Auflösungstheorie der Integralgleichungen zweiter Art auf Grund von Kerniteration und Kernabspaltung" (Nr. 1 bis 8), danach den Anfang von Abschnitt II: „Wesen und Bildung der Parametrix P für Randwertprobleme zweiter Ordnung im Zweidimensionalen" (Nr. 9 bis 11). Nachfolgend beende ich den Abschnitt II (Nr. 12 bis 17) und bringe anschließend den Abschnitt III: „Eigenschaften der Parametrix P für Probleme zweiter Ordnung im Zweidimensionalen" vollständig. Eine spätere Veröffentlichung soll sich mit der Auflösungstheorie für Randwertprobleme mittels der Parametrixmethode befassen (Abschnitt IV).

12. Das Wesen der P-Methode.

a. Die *Parametrixmethode* (P-Methode) *von Hilbert* ist neben der in Nr. 11 angedeuteten Methode zur Auflösung elliptischer Randwertprobleme mittels Greenscher Funktionen (G-Methode) und derjenigen mittels Grundlösungen eine dritte Integralgleichungsmethode. Hilbert löst die Differentialgleichung

$$EU \equiv A \cdot U_{xx} + 2B \cdot U_{xy} + C \cdot U_{yy} + A_0 \cdot U_x + B_0 \cdot U_y + C_0 \cdot U = F$$

$$\text{mit} \quad AC - B^2 > 0, \; A > 0; \quad \text{vgl. (10. 1).}$$

Dabei ist der Ausgangsbereich b für die Punkte $t = t(x, y)$ die Kugeloberfläche (Hilbert, 6. Mitt., S. 9 und 13). An Stelle einer eigentlichen Randbedingung wird eindeutiges Verhalten auf b gefordert (Hilbert, Kap. VIII, S. 65). Alle vorgegebenen Funktionen werden bei Hilbert beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt (Hilbert, 6. Mitt., S. 10). Zum Beweis der beiden Defektsätze und des Lösungssatzes wird der Differentialausdruck E allgemein und zum

Beweis der Existenz einer Greenschen Funktion G wird dort der Kürze halber der sich selbst adjungierte Fall $E = \widetilde{E}$ angenommen (Hilbert, S. 23); dabei ist

$$\widetilde{E}\,U \equiv (A \cdot U)_{xx} + 2\,(B \cdot U)_{xy} + (C \cdot U)_{yy} - (A_0 \cdot U)_x - (B_0 \cdot U)_y + C_0 \cdot U.$$

Hilbert bildet unmittelbar für E an Stelle von G eine „Parametrix" $P = P(t, t') = P(x, y; x', y')$. Dieses P erfüllt vor allem die Eigenschaften I, II und IV wie G in Nr. 11a, d. h.:

I. P ist zweimal stetig differenzierbar nach (x, y, x', y') für t und t' in b, solange $R = R(t, t') > 0$ ist; $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$; ferner ist $P \lesssim 1 + |\log R|$ und die ersten Ableitungen von P sind $\lesssim 1 : R$ [1]).

II. P ist für $R \to 0$ in solcher Weise singulär, daß die Greenschen Formeln

$$1. \quad \int P \cdot E'\,U'\,dt' = \int \widetilde{E}'\,P \cdot U'\,dt' - U \quad \text{und}$$

$$2. \quad E \int P \cdot F'\,dt' \quad = \int EP \cdot F'\,dt' - F$$

bestehen; vgl. (11. 1, 2).

IV. $\int P \cdot F'\,dt'$ hat die von U allgemein geforderten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften; vgl. (10. 3, 4, 5).

Ferner gilt die Differential*ung*leichung

$$(12.\,1) \qquad EP \lesssim 1 : R \quad \text{und somit auch} \quad \widetilde{E}'\,P \lesssim 1 : R$$

anstatt dem in Nr. 11a angegebenen III; P genügt demnach nicht einer homogenen Differentialgleichung wie G (und zwar homogen, wenn das ursprüngliche und das adjungierte Randwertproblem keine Eigenlösungen außer Null haben, d. h. wenn $r = \widetilde{r} = 0$ ist). Dann wird wegen II, 1 und $E'\,U' = F'$ die Integralgleichung

$$(12.\,2) \qquad W - \int \widetilde{E}'\,P \cdot W'\,dt' = -\int P \cdot F'\,dt'$$

durch $W = U$ gelöst, wobei für den Defekt r der Differentialgleichung $r \geqq 0$ gilt; (12. 2) besitzt möglicherweise auch solche Lösungen, die nicht gleichzeitig

[1]) Ich setze (wie am Anfang der Nr. 3 angegeben) für 2 Ausdrücke g und h, die Konstanten oder Funktionen sein mögen, $g \lesssim h$, wenn $|g| < |k \cdot h|$ gilt; dabei sei k eine positive, endliche Konstante oder eine beschränkte Funktion größer als eine positive Konstante und im übrigen unwesentlich. Entsprechend sind $\lesssim$, $\gtrsim$, $\gtrsim$, $\eqsim$ zu definieren.

Danach würde P durch die hier nicht gestellte Forderung $P \lesssim \log R$ oder $P \lesssim 1 + \log R$ wegen der Möglichkeit $\log R = 0$ für $R = 1$ und $1 + \log R = 0$ für $R = 1 : e$ unerlaubt eingeschränkt. Würde andererseits von R gefordert, daß $\log R$ für t und t' in b nirgends Null wäre, so könnte das nur durch eine unerwünschte Einschränkung des größten Durchmessers von b erreicht werden. (Vgl. dagegen die Fußnote zu Nr. 16a betreffs Abschätzung durch $\log n$.)

die Differentialgleichung $EU = F$ befriedigen. (12. 2) entspricht der für G abgeleiteten Integralgleichung (11. 5) und tritt jetzt an die Stelle von

(11. 3) $$U = -\int G \cdot F' dt' \quad \text{für} \quad r = 0.$$

(12. 2) ist eine der in Nr. 1d angegebenen Integralgleichungen mit dem Kern $N : R$ und ist nach Abschnitt I zu lösen. Hilbert bezieht sich auf die Fredholmsche Auflösungstheorie (vgl. Hilbert, S. 17, ferner Lit. Fredholm). Diese ist für (12. 2) nicht vollständig durchgeführt (wie in Nr. 2d festgestellt wurde), was in Nr. 5 nachgeholt wurde. Hilbert sondert für sein Beispiel aus der allgemeinen Lösung von (12. 2) die Lösung der Differentialgleichung $EU = F$ aus.

(Hilbert, S. 8—24, und die Ankündigung davon in der 5. Mitteilung, 1906, S. 480. Bedeutung und Wesen der Hilbertschen P-Methode erörtern Hellinger, Nr. 21 daselbst, Lichtenstein Diff.gl., S. 1296 und 1307, Lichtenstein konf. Abb., S. 7—8. In allen diesen Arbeiten wird auch auf verwandte Überlegungen hingewiesen. Die Hilbertsche P-Methode wird für elliptische Gleichungen im komplexen Gebiet von Haupt fortgeführt; vgl. Literaturangabe. Haupt bildet ein abgeschlossenes P und beweist auch $r = \bar{r}$. Eine nähere Beziehung zu meiner Arbeit besteht nicht. Ferner vgl. Mathisson: Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischem Typus, Math. Annalen **107** (1932), Heft 3, S. 400—419. Er benutzt ein unsymmetrisches P, dessen Form er im Heft 4, S. 648, in einer für die Anwendung unwesentlichen Weise berichtigt. Die Arbeit wird fortgesetzt in: Die Parametrixmethode in Anwendung auf hyperbol. Gleichungssysteme, Prace, mat. fiz. **41**, S. 177—185, Warschau 1934. Das von Mathisson gebildete P hat keine Beziehung zu dem P vorliegender Arbeit.)

b. Von der Hilbertschen P-Methode ausgehend entwickle ich ein *Verfahren zur Lösung allgemeinerer Randwertprobleme* der reellen Analysis. Dieses Verfahren wird im Abschnitt IV für folgende beiden Probleme durchgeführt:

(10. 7) $EU = F$ in $(b_0 - d_0)$ und $U = 0$ auf d_0 mit $AC - B^2 = 1$ und $A > 0$; b_0 ein in Nr. 9b definierter eckenfreier Bereich mit dem Rand d_0 (Fig. 1);

(10. 8) $\Delta U + TU = F$ in $b(\pi : g_1, g_2, \ldots, g_p) - d(\pi : g_1, \ldots, g_p)$ und $U = 0$ auf $d(\pi : g_1, \ldots, g_p)$; $b = b(\pi : g_1, \ldots, g_j)$ ein in Nr. 9c und d definierter Bereich mit den Eckenwinkeln $\pi : g_1, \pi : g_2, \ldots, \pi : g_p$ und dem Rand $d = d(\pi : g_1, \ldots, g_p)$ (Fig. 2); $g_1, g_2, \ldots, g_p$ irgendwelche Zahlen der Reihe 2, 3, ...; $TU \equiv A_0 \cdot U_x + B_0 \cdot U_y + C_0 \cdot U$.

Die von U zu fordernden und von den vorgegebenen Funktionen A bis F angenommenen allgemeinen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften wurden in Nr. 10a zusammengestellt; die Haupteigenschaften von F wiederhole ich in nachfolgender Nr. 20b, VI. Ferner wird die Grundlage des angekündigten Verfahrens im Abschnitt V auf weitere Probleme ausgedehnt. Durch nachfolgende P-Methode werden

1. Probleme mit „eigentlichen" Randbedingungen und diese „unmittelbar" gelöst; „eigentlich" heißt (wie in Nr. 10c näher angegeben), daß ein

elliptisches Randwertproblem mit einem wirklichen Rand d vorliegt; „unmittelbar“ wird anschließend 5 erklärt;

2. die Probleme grundsätzlich einfacher gelöst als mittels der in Nr. 11 angeführten G-Konstruktionen;

3. bisher nicht oder nur teilweise behandelte Probleme gefördert und erledigt;

4. die G durch P so dargestellt, daß das Verhalten der G für $R \to 0$ und für t oder t' am Rande d und das Zusammentreffen von singulärem und Randverhalten unmittelbar und im einzelnen mittels expliziten Formeln durch das entsprechende Verhalten von P wiedergegeben wird; man braucht sich also nicht nur auf Existenzaussagen wie bei G für komplizierte Probleme zu beschränken;

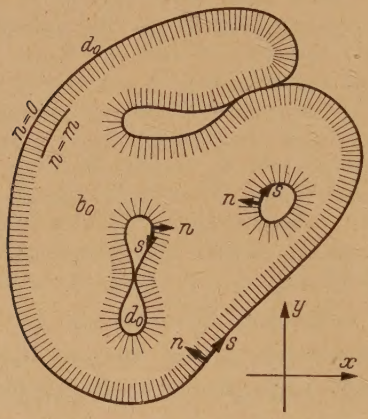

Fig. 1.
Eckenfreier Ausgangsbereich b_0 mit dem Rand d_0, $(b_0 - d_0)$ dreifach zusammenhängend.

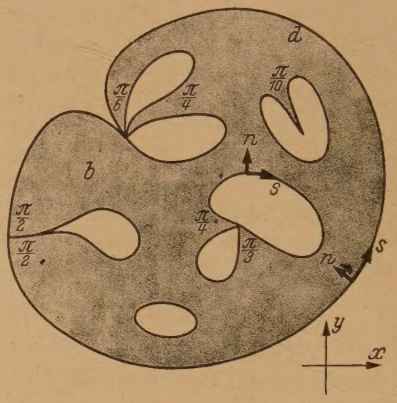

Fig. 2.
Eckiger Ausgangsbereich $b = b\,(\pi\colon 2, 2, 3, 4, 4, 6, 10)$ mit dem Rand d, $(b - d)$ vierfach zusammenhängend.

5. die Lösungstatsachen in Parallele zu den entsprechenden der Integralgleichungstheorie gesetzt und insbesondere durch die Theorie für die allgemeinste Greensche Funktion und ihrer kennzeichnenden Sonderfälle vervollständigt.

Unter „unmittelbarer“ Behandlung der Probleme verstehe ich den Verzicht auf Grenzvorgänge und auf die Zwischenschaltung einfacherer Probleme, die ich in Nr. 11 b und c erwähnte. In diesem Sinn wären die Auflösungssätze nach der früheren G-Methode nur für b_0 bekannt und „genügen also nicht, um die Randwertaufgabe für ein so einfaches Gebiet wie ein Dreieck aufzulösen“ (Hahn-Lichtenstein-Lense, S. 1309). In vorliegender Arbeit werden beispielsweise bei zweidimensionalen Bereichen Eckenwinkel $e = \pi : g$, g ganzzahlig und $g > 1$, zugelassen, ferner auch Doppelstücke des Randes, die bei der

mittels spezieller Grenzvorgänge erreichten Jordanschen Kurve beim G-Verfahren nicht auftreten dürfen (Lichtenstein, Diff.gl., S. 1291).

Neben dieser P-Methode, die nach dem Vorgang von Hilbert auf der eine partielle Integration ausdrückenden Greenschen Formel (Nr. 12a II 1) fußt, gebe ich noch diejenige für P auf Grund der eine Vertauschung von Differentiation und Integration bewerkstelligenden Greenschen Formel (Nr. 12a II 2) entsprechend der an (11. 6, 7) anschließenden G-Methode an. Dabei stelle ich geringere Ergebnisse auf einfachere Weise fest. Auch vervollständige ich damit den Vergleich der P-Methode mit der G-Methode.

Die P-Methode könnte man mit Nr. 11b, III kombinieren; man würde dabei mittels P ein reduziertes G angeben, und zwar für allgemeinere Fälle als für den Differentialausdruck Δ und einen eckenfreien Bereich b_0. Ferner könnte man die P-Methode auf den Fall $r = 0$ beschränken und dann den Fall $r > 0$ mit der Eigenwerttheorie entsprechend (11. 4) erledigen (Hilbert, S. 25—34). Auf beide Möglichkeiten geht vorliegende Arbeit nicht ein.

c. Der erste und *entscheidende Schritt der P-Methode besteht in der Bildung der Parametrix P.* Außer den in Nr. 12a für das Hilbertsche P angegebenen Eigenschaften soll P in Ergänzung der Differentialungleichung (12. 1) noch den in Nr. 11a unter III angegebenen Randbedingungen wie G genügen, nämlich

$$(12.\,3) \qquad P = 0 \text{ für } t \text{ auf } d, \text{ wenn } t' \text{ in } b, \quad \text{und}$$
$$\text{für } t' \text{ auf } d, \text{ wenn } t \text{ in } b \text{ liegt}; \quad R > 0.$$

Da G außerdem einer (vollständigen oder reduzierten) Differentialgleichung genügt, läßt sich zeigen, daß G bis auf einen linearen Ausdruck in Eigenlösungen von E und $\widetilde{E}$ bestimmt ist (vgl. Abschnitt IV). Hingegen läßt die Differentialungleichung für P unendlichviele Bildungsmöglichkeiten für P zu.

Nachfolgend wird P für das Randwertproblem (10. 7) im allgemeinen in (16. 5) und in einem besonderen Fall in (16. 6), weiter für das Randwertproblem (10. 8) im allgemeinen in (17. 3) und in besonderen Fällen in (15. 2), (17. 1) und (17. 2) genau angegeben. Ferner wird P für verschiedene Erweiterungen der Randwertprobleme im Abschnitt V an mehreren Stellen angegeben oder angedeutet. P wird auf unmittelbare Weise als eine Funktion gebildet, die wesentlich weitergehende Eigenschaften wie das P für das Hilbertsche Beispiel hat. Denn es soll das Unendlichwerden von P für $R \to 0$ als kennzeichnende Singularität (Nr. 12a, II) mit dem Nullwerden auf d als Randeigenschaft unmittelbar zu einer expliziten Darstellung von P derart verbunden werden, daß vor allem der Kern von (12. 2) im engeren Sinne uneigentlich singulär wird (vgl. Nr. 2c) und insbesondere (12. 1) gilt. Hierbei

sind weitergehende Forderungen zu berücksichtigen, die sich erst bei der Aussonderung der allgemeinen Lösung von (10. 7 bzw. 8) aus der allgemeinen Lösung von (12. 2) bemerkbar machen. Das gründe ich auf eine wesentliche Verallgemeinerung des bekannten Prinzips der Spiegelung bei gewissen Abstandsfunktionen, wie in der nächsten Nr. 13 erklärt wird.

(Vgl. Lichtenstein, Diff.gl., S. 1290, ferner Courant, Bd. 1, S. 297, 305, 310, 312—313, und Bd. 2, S. 241—242. Nicht gemeint ist die Spiegelung für Lösungsfunktionen; vgl. Lichtenstein, Diff.gl., S. 1303, Fußnote 59, ferner Courant, Bd. 2, S. 247.)

Der Nachweis der weitergehenden Eigenschaften von P macht eine wesentliche Vertiefung bekannter potentialtheoretischer Hilfssätze und Methoden erforderlich.

Sind die Hauptsätze bewiesen, so genügt es zur Vorbereitung einer praktischen Auflösung, das Randwertproblem durch irgendeine P-ähnliche Funktion, die nicht die weitergehenden Eigenschaften wie P zu haben braucht, auf (12. 2) zurückzuführen. Dann ist durch Einsetzen der allgemeinen Lösung von (12. 2) in $EU = F$ aus dieser die allgemeine Lösung von (10. 7 bzw. 8) auszusondern. Ist bekannt, daß $r = 0$ gilt, so kann man auch den Ansatz $U = -\int P \cdot Z'\, dt'$ an Stelle von (11. 6) benutzen. Da P gegenüber G elementar gebildet wird, könnte man vielleicht so einer numerischen Behandlung der Randwertprobleme einen Weg bereiten. Ein solcher ist für die gleichen Probleme nach dem bisher üblichen Verfahren im allgemeinen nicht gangbar (vgl. auch Hell.-Toepl., S. 1501—1502).

13. P für Halbebene und Winkelraum $e = \pi g_0 : g$ zweier Geraden durch Spiegelpunkte ausgedrückt.

Die Bildung einer Parametrix P fußt auf dem angekündigten Prinzip der Spiegelung bei gewissen Abstandsfunktionen (Nr. 13a). Dieses führt auf Parametrizes P für Halbebene (Nr. 13b) und offenen Winkelraum zweier Geraden (Nr. 13c), die ich später in allgemeinere P überführe. Halbebene und offener Winkelraum sind Ausnahmen von dem anfangs Nr. 9a eingeführten Bereich b, weil sie unbeschränkt sind. Demnach sind sie als Grundbereiche für Randwertprobleme unzulässig. Ich benutze sie nur zum Aufbau allgemeinerer b.

a. Es mögen in der xy-Ebene die Geraden $d_1, d_2, \ldots$ vorliegen. $u, v, \ldots, p$ seien positive, ganze Zahlen. Spiegele ich t zuerst an d_u, dann diesen *Spiegelpunkt* an d_v usw. bis zur Spiegelung an d_p, so komme ich auf einen Punkt, den ich mit $t(u, v, \ldots, p)$ bezeichne. Gelegentlich setze ich $t(0) = t$. Man schreibe $M(u, v, \ldots, p)$ bzw. $S(u, v, \ldots, p;\ u', v', \ldots, p')$, wenn man $t = t(u, v, \ldots, p)$ und $t' = t'(u', \ldots, p')$ in irgendeine Funktion $M = M(t)$ bzw. $S = S(t, t')$

einsetzt. Durch wiederholte Anwendung von $R(u; 0) = R(0; u)$ [2]) erhält man (Fig. 3)

$$(13.1)\quad R(u, \ldots, s, q, p; 0) = R(u, \ldots, s, q; p) = R(u, \ldots, s; p, q) = \cdots = R(0; p, q, s, \ldots, u).$$

Ich betrachte (Fig. 4) die Punkte

$$(13.2)\qquad t(uv^a) \quad \text{und} \quad t(vu^a),$$

weiter

$$(13.3)\qquad t(u, vu^a) \quad \text{und} \quad t(v, uv^a) \quad \text{für } a = 0, 1, 2, \ldots;$$

hierbei ist $uv^0 \equiv (uv)^0$ durch Null zu ersetzen; ferner bezeichnet $uv^a \equiv (uv)^a$ für $a > 0$ die a-mal wiederholte doppelte Spiegelung erst an der Geraden d_u und dann an der Geraden d_v. d_u und d_v sollen sich im Endlichen schneiden. e sei einer der möglichen Winkelräume, die von d_u und d_v gebildet werden. Stets sei

$$(13.4)\quad \text{entweder } 0 < e < \pi \quad \text{oder } \pi < e < 2\pi.$$

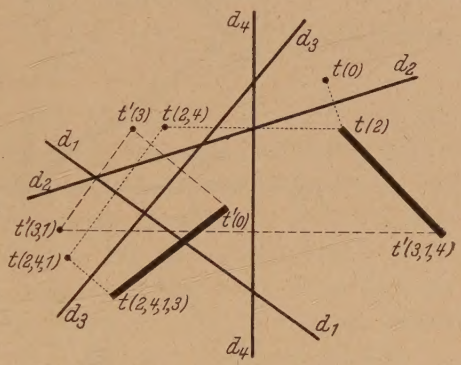

Fig. 3. $R(2, 4, 1, 3; 0) = R(2; 3, 1, 4)$.

Dagegen sind in (9.1) die Grenzen $e = 0$ und $e = \pi$ zugelassen. Alle genannten Punkte haben vom Schnittpunkt von d_u mit d_v den gleichen Abstand. Von diesem Abstand abgesehen bestimmt sich die Lage von jedem Punkt $t = t(u, v, \ldots, p)$ durch den Winkel $w = w(u, v, \ldots, p)$, den der vom Schnittpunkt ausgehende Leitstrahl nach t mit der den e-Raum abgrenzenden Halbgeraden von d_u bildet. w soll im Sinne der Drehung der letztgenannten Halbgeraden über den angrenzenden e-Raum hinweg positiv genommen werden. w ist bis auf positive oder negative ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Ich beweise

$$(13.5)\qquad \begin{aligned} w(uv^a) &\equiv +2ae + w(0) \pmod{2\pi} \\ \text{und}\quad w(vu^a) &\equiv -2ae + w(0) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

ferner

$$(13.6)\qquad \begin{aligned} w(u, vu^a) &\equiv -2ae - w(0) \pmod{2\pi} \\ \text{und}\quad w(v, uv^a) &\equiv +2(a+1)e - w(0) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

---

[2]) Man beachte, daß $R(t, t')$ den Abstand des Punktes t von t' bezeichnet (vgl. Nr. 12a I) und $R(u; v)$ den Abstand des Spiegelpunktes $t(u)$ von dem Spiegelpunkt $t'(v)$. Insbesondere ist also $R(t, t') = R(0; 0)$. Im Text ist $R(u; 0)$ die Entfernung des Spiegelpunktes $t(u)$ vom Parameterpunkt $t' = t'(0)$.

stets für $a = 0, 1, 2, \ldots$ bis zu einer beliebigen endlichen (positiven, ganzen) Zahl. Für $a = 0$ ist (13. 5) nach Definition und (13. 6) nach elementargeometrischer Überlegung richtig. Nehme ich (13. 6) für irgendein a der angegebenen Zahlenreihe als erwiesen an, so folgt daraus wegen der Gültigkeit für $a = 0$ zuerst (13. 5) für $(a + 1)$ anstatt a und dann aus letzterem (13. 6) für $(a + 1)$ anstatt a. Damit sind alle vier Formeln bewiesen.

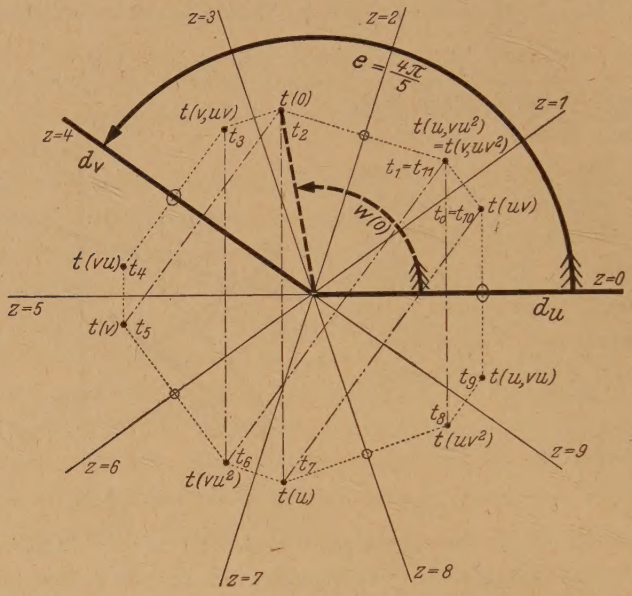

Fig. 4. Spiegelpunkte eines Strahlenbüschels. Die für $w(0) = 2\pi : 5$ zusammenfallenden Punkte sind durch 0 gekennzeichnet.

Es sollen für jedes $t(0)$ nur endlichviele verschiedene Spiegelpunkte (13. 2, 3) vorhanden sein. Dann kann man zuerst die Existenz einer ganzen Zahl g fordern, für die

$$w(uv^{a+g}) \equiv w(uv^a) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

gilt. Also muß

$$e = \pi g_0 : g \tag{13. 7}$$

sein; hierbei bedeutet g_0 irgendeine ganze, zu g teilerfremde Zahl, von der wegen (13. 4) $0 < g_0 < g$ oder $g < g_0 < 2g$ anzunehmen ist. Dann gilt auch

$$w(vu^{a+g}) \equiv w(vu^a) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

$$w(u, vu^{a+g}) \equiv w(u, vu^a) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

$$w(v, uv^{a+g}) \equiv w(v, uv^a) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Mit gleichem Ergebnis kann man von jeder der drei letzten Gleichungen ausgehen. Umgekehrt folgen letztere vier w-Gleichungen aus (13. 7). Demnach gilt der

Hilfssatz I. (13. 7) *ist gleichbedeutend mit der Existenz von nur endlichvielen untereinander verschiedenen Punkten* (13. 2, 3).

Setzt man $e = \pi g_0 : 2c$, c irgendeine ganze positive Zahl, in (13. 5) bzw. $e = \pi g_0 : (2c + 1)$ in (13. 6) ein, so findet man $w(uv^c) \equiv w(vu^c) \pmod{2\pi}$ bzw. $w(u, vu^c) \equiv w(v, uv^c) \pmod{2\pi}$. Umgekehrt sei ein c vorhanden, so daß die vorletzte bzw. letzte Gleichung für jedes $t(0)$ gilt. Dann muß $e = \pi g_0 : 2c$ bzw. $e = \pi g_0 : (2c + 1)$ sein. Demnach gilt der

Hilfssatz II. $e = \pi g_0 : 2c$ *bzw.* $e = \pi g_0 : (2c + 1)$ *ist gleichbedeutend mit* $t(uv^c) = t(vu^c)$ *bzw.* $t(u, vu^c) = t(v, uv^c)$.

Im Fall (13. 7) enthalten die Punkte (13. 2, 3) für $a = 0, \ldots, (g - 1)$ alle untereinander verschiedenen Punkte dieser Art. Ich zeige, daß hierbei je zwei Punkte zusammenfallen. Nach (13. 5) ist $w(uv^a) \equiv w(vu^m) \pmod{2\pi}$ für a und $m = 0, \ldots, (g - 1)$ und alle $t(0)$, wenn entweder $a = m = 0$ oder $a + m = g$ ist. Somit ist $t(uv^0) = t(vu^0) = t(0)$ und $t(uv^a) = t(vu^{g-a})$ für $a = 1, \ldots, (g - 1)$. Nach (13. 6) ist $w(u, vu^a) \equiv w(v, uv^m) \pmod{2\pi}$ für a und $m = 0, \ldots, (g - 1)$ und alle $t(0)$, wenn $a + m + 1 = g$ ist. Somit ist $t(u, vu^a) = t(v, uv^{g-1-a})$ für $a = 0, \ldots, (g - 1)$. Demnach gilt der

Hilfssatz III. *Jeweils g untereinander verschiedene Punkte sind*

1. *im Fall* $e = \pi g_0 : 2c$ *die Punkte* (13. 2) *für* $a = 1, \ldots, (c - 1)$, *wenn* $c \geqq 2$, *dazu* $t(0)$ und $t(uv^c) = t(vu^c)$, *wenn* $c \geqq 1$;
2. *im Fall* $e = \pi g_0 : 2c$ *die Punkte* (13. 3) *für* $a = 0, \ldots, (c - 1)$;
3. *im Fall* $e = \pi g_0 : (2c + 1)$ *die Punkte* (13. 2) *für* $a = 1, \ldots, c$, *dazu* $t(0)$;
4. *im Fall* $e = \pi g_0 : (2c + 1)$ *die Punkte* (13. 3) *für* $a = 0, \ldots, (c - 1)$, *dazu* $t(u, vu^c) = t(v, uv^c)$;

alle weiteren Punkte von (13. 2, 3) *fallen mit vorstehenden zusammen.*

Diese unter der Voraussetzung (13. 7) auftretenden Punkte brauche ich auch in folgender Anordnung (Fig. 4). Zu $w(0)$ bestimme ich eine Zahl z durch

$$z(\pi : g) \leqq w(0) < (z + 1)(\pi : g)$$

und mache z durch Beschränkung auf die Reihe

$$z = 0, 1, \ldots, (2g - 1)$$

eindeutig. Ich bezeichne $t(0)$ mit t_z und den aus t_m durch Spiegelung am Strahl $w = (m + 1)(\pi : g)$ bzw. $w = m\pi : g$ hervorgehenden Punkt mit t_{m+1} bzw.

t_{m-1}. Hierin soll m nacheinander die Zahlen $z, z+1, z+2, \ldots$ bzw. $z, z-1, z-2, \ldots$ durchlaufen. Demnach fallen die Punkte t_m für $m = 0, \ldots, (g_0 - 1)$ in den Winkelraum $e = g_0\pi : g$ zwischen d_u und d_v. Liegt auch $t(0)$ in diesem Winkelraum, so ist einer der genannten Punkte gleich $t(0)$. Dann liegt in ihm nur $t_0 = t(0)$, wenn $g_0 = 1$ ist. Ich beweise

$$w(t_m) \equiv (m - z)(\pi : g) + w(0) \pmod{2\pi} \quad \text{für } m - z = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \tag{13. 8}$$

ferner

$$w(t_m) \equiv (m + z + 1)(\pi : g) - w(0) \pmod{2\pi} \quad \text{für } m - z = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots; \tag{13. 9}$$

beidemal läuft $(m - z)$ bis zu einer beliebigen, endlichen (positiven, ganzen) Zahl. (13. 8) geht für $m - z = 0$ aus der Definition von t_z hervor. Nehme ich (13. 8) für irgendeine gerade Zahl $(m - z)$ als richtig an, so folgt daraus wegen (13. 6) für $a = 0$ zuerst (13. 9) für $(m \pm 1)$ anstatt m und dann aus letzterem (13. 8) für $(m \pm 2)$ anstatt m. Damit sind beide Formeln bewiesen. Aus ihnen folgt

$$t_{m+2g} = t_m \quad \text{für } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Vergleicht man unter der Voraussetzung (13. 7) einerseits (13. 5) mit (13. 8) und andererseits (13. 6) mit (13. 9), so findet man den

Hilfssatz IV. *Die t_m stimmen mit den Punkten* (13. 2, 3) *überein; insbesondere durchlaufen die g im allgemeinen untereinander verschiedenen t_m für $m - z = 0, 2, 4, \ldots, 2g - 2$ bzw. $m - z = 1, 3, 5, \ldots, 2g - 1$ die im Hilfssatz* III *angegebenen Punkte* 1 *für $g = 2c$ und* 3 *für $g = 2c + 1$ bzw.* 2 *für $g = 2c$ und* 4 *für $g = 2c + 1$; dabei ist von der Reihenfolge solcher g Punkte abzusehen* [3]).

Schließlich stelle ich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Zusammenfallen von Punkten t_m fest, wobei $m - z = 0, 1, 2, \ldots, 2g - 1$ sein soll. Die Punkte (13. 8) für $m - z = 0, 2, \ldots, 2g - 2$ sind ebenso wie die Punkte (13. 9) für $m - z = 1, 3, \ldots, 2g - 1$ stets untereinander verschieden, da aus $w(t_m) \equiv w(t_n) \pmod{2\pi}$ für $n - z = 0, 2, \ldots, 2g - 2$ bzw. $n - z = 1, 3, \ldots, 2g - 1$ und etwa $n \leqq m$ beidemal $(m - n)(\pi : g) \equiv 0 \pmod{2\pi}$, also $m = n$ folgt; die Punkte (13. 8) liegen ebensowenig wie die Punkte (13. 9) in benachbarten Winkelräumen $(\pi : g)$. Weiter schließt man aus $w(t_m) \equiv w(t_n) \pmod{2\pi}$ für $m - z = 0, 2, \ldots, 2g - 2$

[3]) Durchläuft man also die Folge der $2g$ untereinander verschiedenen Werte t_m für $m - z = 0, 1, \ldots, 2g - 1$, so ergibt sich genau abwechselnd je ein Punkt von (13. 2) und (13. 3).

und $n - z = 1, 3, \ldots, 2g - 1$, wenn also die Punkte in benachbarten Winkelräumen $(\pi : g)$ liegen, daß

$$A \equiv (m - n - 2z - 1)(\pi : g) + 2w(0) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

sein muß. Hierin ist nach Definition von z

$$(m - n - 1)(\pi : g) \leqq A < (m - n + 1)(\pi : g),$$

also entweder

$$A = 0,\ w(0) = z(\pi : g),\ m - n - 1 = 0,$$

oder

$$A = -2\pi,\ w(0) = z(\pi : g),\ m - n - 1 = -2g;$$

dabei kann $m - n - 1 = -2g$ nur für $m - z = 0$ und $n - z = 2g - 1$ eintreten. Ist umgekehrt $w(0) = z(\pi : g)$, d. h. liegt $t(0)$ auf einem der ausgezeichneten $2g$ Strahlen, so fallen für $m - n - 1 = 0$ oder $m - n - 1 = -2g$ je zwei der angegebenen $2g$ Punkte zusammen. Somit ergibt sich der

Hilfssatz V. *Für $w(0) = z(\pi : g)$, wenn also $t(0)$ auf dem Rand eines Winkelraumes $(\pi : g)$ liegt, und nur dafür fallen Punkte t_m für $m - z = 0, 1, 2, \ldots, 2g - 1$ zusammen, und zwar $t_m = t_{m+2g-1}$ für $m - z = 0$ und $t_m = t_{m-1}$ für $m - z = 2, 4, \ldots, 2g - 2$; im übrigen, also im allgemeinen Fall $z(\pi : g) < w(0) < (z + 1)(\pi : g)$, wenn demnach $t(0)$ im Innern eines Winkelraumes $(\pi : g)$ liegt, sind die t_m für $m - z = 0, 1, 2, \ldots, 2g - 1$ untereinander verschieden. Somit decken sich auch die Punkte* (13. 2, 3) *paarweise unter Berücksichtigung des im Hilfssatze* IV *angegebenen Zusammenhanges, wenn t auf einem Strahl $z(\pi : g)$ für $z = 0, 1, 2, \ldots, 2g - 1$ liegt, und nur dann tritt solches ein.*

b. Ich bezeichne die durch

$$4\pi \cdot P = -\log R^2(0; 0) + \log R^2(0; u) \tag{13. 10}$$

definierte Funktion P als *Parametrix für* den Fall $E = \Delta + T$, wenn eine durch die Gerade d_u abgegrenzte *Halbebene* an die Stelle von b tritt. P ist beliebig oft differenzierbar nach (x, y, x', y') für t und t' in b, solange $R > 0$ ist. Denn es sind allgemeiner $x(u, v, \ldots, p)$ und $y(u, v, \ldots, p)$ beliebig oft nach (x, y) differenzierbar. Es ist $P \gtrless 1 + |\log R|$. Die m-ten Ableitungen von P sind $\lesssim 1 : R^m$. Insbesondere ist $\Delta P = 0$ für $R > 0$. Ferner ist $(4\pi \cdot P + \log R^2)$ beliebig oft differenzierbar nach (x, y, x', y') für t in $(b - d)$ und t' in b einschließlich $R = 0$. Es gilt $P = P''$, das heißt $P(t, t') = P(t', t)$. Schließlich genügt P den Randbedingungen (12. 3).

c. Weiter bilde ich die *Parametrix für* den Fall $E = \Delta + T$, wenn ein offener *Winkelraum* $e = \pi g_0 : g$ *zweier Geraden* an die Stelle von b tritt; g_0 und g wie in (13. 7). Die Beschränkung auf $e < \pi$ wie in Nr. 9d erfolgt erst in Nr. 14c.

Die Geraden, an denen t und t' wiederholt gespiegelt werden, bezeichne ich mit d_u und d_v und setze

$$4\pi \cdot P = -\log R^2(0;0) + \log R^2(0;u) + \log R^2(0;v) \overset{e}{\mp} \cdots \text{ bis} \tag{13.11}$$

$$\text{entweder } -\log R^2(0;uv^c) \quad \text{für } g = 2c$$

$$\text{oder } +\log R^2(0;u, vu^c) \quad \text{für } g = 2c+1.$$

Dieses P ist gleichbedeutend mit

$$4\pi \cdot P = -\Sigma_m(-1)^{m-z} \cdot \log R^2(t, t'_m) = -\Sigma_m(-1)^{m-z} \cdot \log R^2(t_m, t')$$

$$\text{für } m - z = 0, \ldots, (2g-1).$$

Die Endlichkeit des Verfahrens bedingt die Einschränkung von e auf $(\pi g_0 : g)$. Letztere Form von P besteht aus g Paaren von Logarithmen, von denen jedes Paar für sich genommen dann und nur dann verschwindet, wenn t oder t' auf einem der Strahlen $w = z\pi : g$ für $z = 0, 1, 2, \ldots, 2g-1$ liegt. Also ist $P = 0$ für t oder t' auf allen $2g$ Strahlen, insbesondere auf d_u und d_v. P hat im Fall $g_0 = 1$ die für P von (13. 10) angegebenen allgemeinen Eigenschaften. Das gilt in sinngemäßer Übertragung für den allgemeinen Fall $g_0 \geqq 1$, wobei dann g_0 singuläre Werte $R = 0$ auftreten. Letzteres wende ich im Abschnitt V an.

14. P für Halbebene und Winkelraum $e = \pi : g$ zweier Geraden durch Abstände ausgedrückt.

Die durch (13. 10, 11) eingeführten Parametrizes P drücke ich nachfolgend durch $R^2(0;0) = R^2$, n_u und n_v aus, um diese P in Nr. 16 und 17 bei krummlinigen Berandungen anwenden zu können; dabei bedeutet n_u bzw. n_v der Normalenabstand des Punktes $t = t(0)$ von der Geraden d_u bzw. d_v.

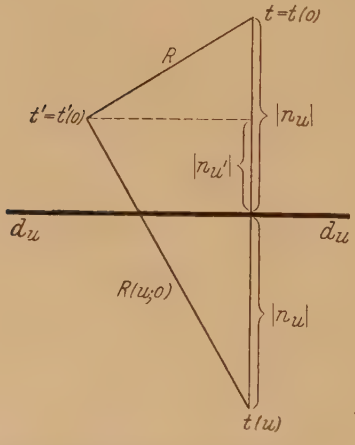

Fig. 5. $R^2(u;0) = R^2 + 4\, n_u n'_u$.

a. Zuerst werden die *Abstandsquadrate* $R^2(vu^a;0)$ *und* $R^2(u, vu^a;0)$ für $a = 0, 1, 2, \ldots$ bis zu einer beliebigen, endlichen (positiven, ganzen) Zahl *für* (13. 4) genügende und sonst *beliebige* e *durch* $R^2(0;0) = R^2$, n_u *und* n_v *ausgedrückt.* Im Fall $0 < e < \pi$ mögen die negativen Richtungen von n_u und n_v nirgends in das Innere des Winkelraumes e weisen; im Fall $\pi < e < 2\pi$ mögen die positiven Richtungen stets in das Innere zeigen. Aus (Fig. 5)

$R^2(u;0) = R^2 + 4\,n_u n_u'$ erhalte ich durch den in Nr. 13a wiederholt angewandten Schluß von a auf $(a+1)$

$$R^2(vu^a;0) = R^2 + 4\,\Sigma_w\left(n_u(v, uv^{w-1})\cdot n_u' + n_v(vu^{w-1})\cdot n_v'\right)$$

und

$$R^2(u, vu^a;0) = R^2 + 4\,n_u n_u' + 4\,\Sigma_w\left(n_u(uv^w)\cdot n_u' + n_v(u, vu^{w-1})\cdot n_v'\right)$$
$$\text{für } w = 1, \ldots, a \text{ und } a = 1, 2, \ldots\ ^4).$$

Damit ist der erste Schritt zur angekündigten Umformung von (13. 10, 11) getan. Als zweiter Schritt werden in diesen Formeln die n_u und n_v der gespiegelten Punkte durch $n_u(0)$ und $n_v(0)$ wiedergegeben. Es ist, wie sich aus $n_u(v) = n_u + 2\cos e\cdot n_v$ und $n_u(u) = -n_u$ durch den Schluß von w auf $(w+1)$ unter Anwendung der Regeln für Binomialkoeffizienten ergibt,

$$n_u(v, uv^w) = \Sigma_m(-1)^{w+m}(2\cos e)^{2m}\cdot\left(\binom{w+m}{2m}\cdot n_u + \binom{w+m+1}{2m+1}\cdot 2\cos e\cdot n_v\right)$$

und

$$n_u(uv^w) = \Sigma_m(-1)^{w+m}(2\cos e)^{2m}\cdot\left(\binom{w+m}{2m} n_u - \binom{w+m}{2m+1} 2\cos e\cdot n_v\right)$$

für $m = 0, \ldots, w$ und $w = 0, 1, \ldots$; dabei ist $(2\cos e)^0 = 1$ auch für $e = \pi : 2$ und $\binom{w}{0} = 1$ auch für $w = 0$ zu setzen. Entsprechendes gilt für $n_v(u, vu^w)$ und $n_v(vu^w)$. Man setze

(14. 1) $$f_0 = 0 \quad \text{und}$$

$$f_a = f_a(e) = \Sigma_w\Sigma_m(-1)^{w-1+m}\binom{w-1+m}{2m}\cdot(2\cos e)^{2m};$$

ferner

(14. 2) $$h_{-1} = 0,\ h_0 = 0 \quad \text{und}$$

$$h_a = h_a(e) = \Sigma_w\Sigma_m(-1)^{w-1+m}\binom{w+m}{2m+1}\cdot(2\cos e)^{2m+1},$$

beidemal für

$$m = 0, \ldots, (w-1);\ w = 1, \ldots, a;\ a = 1, 2, \ldots;\ \binom{0}{0} = 1 \text{ und } 0^0 = 1.$$

Somit findet man (unter Anwendung der Regeln für Binomialkoeffizienten) das gewünschte Ergebnis

(14. 3) $$R^2(vu^a;0) = R^2 + 4\,f_a(n_u n_u' + n_v n_v') + 4\,(2\cos e\cdot f_a - h_a)\,n_u n_v' + 4\,h_a n_v n_u'$$

---

4) Darin bedeutet beispielsweise $n_u(v, uv^{w-1})$ den Abstand von der Geraden d_u des erst an der Geraden d_v und dann $(w-1)$-mal nacheinander an d_u und d_v gespiegelten Punktes $t = t(0)$. Ferner ist n_u' der Abstand des Punktes $t' = t'(0)$ von der Geraden d_u.

und

$$(14.4)\quad R^2(u, vu^a; 0) = R^2 + 4(1 - f_a + 2\cos e \cdot h_a)n_u n'_u + 4 f_a n_v n'_v + \\ + 4 h_a(n_u n'_v + n_v n'_u) \quad \text{für } a = 0, 1, \ldots.$$

Entsprechende Formeln gelten für $R^2(uv^a; 0)$ und $R^2(v, uv^a; 0)$.

b. *Eigenschaften der* in (14. 1, 2) eingeführten *Koeffizienten* $f_a(e)$ *und* $h_a(e)$.

I. e sei ein *beliebiger Winkel* zwischen 0 und 2π mit Ausnahme von 0, π und 2π.

Aus (14. 1, 2) folgen die Rekursionsformeln

$$(14.5)\quad f_{a+1} = 1 - f_a + 2\cos e \cdot h_a$$

und

$$(14.6)\quad h_{a+1} = 2\cos e - 2\cos e \cdot f_a + (4\cos^2 e - 1)h_a \quad \text{für } a = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die Anfangsglieder von f_a und h_a sind daher

$$f_0 = 0,$$
$$f_1 = 1,$$
$$f_2 = (2\cos e)^2,$$
$$f_3 = 1 - 2(2\cos e)^2 + (2\cos e)^4 \quad \text{usw.},$$

ferner

$$h_{-1} = 0,$$
$$h_0 = 0,$$
$$h_1 = 2\cos e,$$
$$h_2 = -2\cos e + (2\cos e)^3,$$
$$h_3 = 2(2\cos e) - 3(2\cos e)^3 + (2\cos e)^5 \quad \text{usw.}$$

Allgemein folgt aus (14. 5, 6), daß

$$(14.7)\quad h_a = 2\cos e \cdot f_{a+1} - h_{a+1} \quad \text{für } a = -1, 0, 1, 2, \ldots$$

ist. Multipliziert man

1. (14. 5) mit $(-f_{a+1})$ und (14. 7) mit h_a, ferner

2. (14. 5) für $(a + 1)$ anstatt a mit $(-f_{a+1})$ und (14. 7) mit h_{a+1} und addiert jeweils die so entstandenen Gleichungen, so erhält man

1. $(h_a^2 - f_a f_{a+1}) + (h_a h_{a+1} - f_{a+1}^2 + f_{a+1}) = 0,$

ferner

2. $(h_{a+1}^2 - f_{a+1} f_{a+2}) + (h_a h_{a+1} - f_{a+1}^2 + f_{a+1}) = 0.$

Also ist

$$h_{a+1}^2 - f_{a+1} f_{a+2} = h_a^2 - f_a f_{a+1} = \cdots = h_0^2 - f_0 f_1 = 0.$$

Somit besteht

(14. 8) $$h_a^2 = f_a f_{a+1}$$

und

(14. 9) $$h_a h_{a+1} = f_{a+1}(f_{a+1} - 1) \quad \text{für } a = 0, 1, 2, \ldots.$$

II. Insbesondere sei $e = g_0 \pi : g$ wie in (13. 7). Das ist nach dem Hilfssatz II der Nr. 13a gleichwertig mit

$$R^2(uv^c; 0) = R^2(vu^c; 0) \quad \text{für } g = 2c$$

und

$$R^2(u, vu^c; 0) = R^2(v, uv^c; 0) \quad \text{für } g = 2c + 1,$$

beidemal identisch in t und t'. Weiter ist letzteres und damit $e = g_0 \pi : g$ nach (14. 3, 7) bzw. (14. 4, 5) gleichwertig mit

(14. 10) $$h_{c-1} = h_c \quad \text{für } g = 2c$$

und

(14. 11) $$f_{c+1} = f_c \quad \text{für } g = 2c + 1;\ c = 1, 2, \ldots.$$

III. Noch spezieller nehme ich $e = \pi : g$ für $g = 2, 3, \ldots$ an. Dann sind die Anfangswerte:

	f_0,	f_1,	f_2,	f_3;	h_{-1},	h_0,	h_1,	h_2,	h_3,
für $e = \frac{\pi}{2}$:	0,	1,	0,	1;	0,	0,	0,	0,	0,
für $e = \frac{\pi}{3}$:	0,	1,	1,	0;	0,	0,	1,	0,	0,
für $e \leqq \frac{\pi}{4}$:	0,	1,	$\geqq 2$,	$\geqq 1$;	0,	0,	> 1,	> 1,	$\geqq 0$.

Aus (14. 3) folgt für $R = 0$ und $n_u = n_v > 0$, daß

$$R^2(uv^a; 0) = R^2(vu^a; 0) = f_a \cdot 8\, n_u^2 \cdot (1 + \cos e) = f_a \cdot R^2(uv; 0)$$

ist. Hierin ist (Fig. 6)

$$R(uv^a; 0) > R(uv; 0) \quad \text{für } a = 2, \ldots, c,$$

somit

(14. 12) $$f_a > 1 \quad \text{für } a = 2, \ldots, c \text{ und } c > 1,$$

weiter wegen (14. 11) noch

$$f_{c+1} > 1 \quad \text{für } g = 2c + 1 \text{ und } c > 1.$$

Aus (14. 4) folgt für $R = 0$ und $n_u = n_v > 0$, daß

$$R^2(u, vu^a; 0) = R^2(v, uv^a; 0) = (1 + 2h_a + 2\cos e \cdot h_a) \cdot 4\, n_u^2$$

ist. Hierin ist (Fig. 6)

$$R(u, vu^a; 0) \geqq 2\, n_u \quad \text{für } a = 1, \ldots, c,$$

somit

$$h_a \geqq 0 \quad \text{für } a = 1, \ldots, c, \quad \text{also nach (14. 8, 12)}$$

$$h_a > 1 \quad \text{für } a = 1, \ldots, (c-1) \text{ und } c > 1, \quad \text{und}$$

$$h_c > 1 \quad \text{für } g = 2c + 1 \text{ und } c > 1,$$

schließlich wegen (14. 10) noch

$$h_c > 1 \quad \text{für } g = 2c \text{ und } c > 1.$$

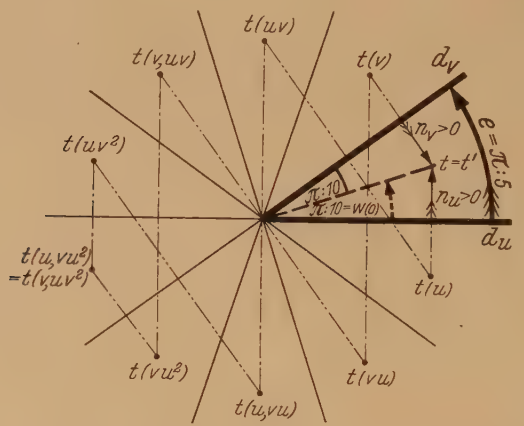

Fig. 6.
$R(uv^2; 0) > R(uv; 0)$ und $R(u, vu^a; 0) \geqq 2\, n_a$
für $a = 0, 1, 2$, wenn $R = 0$, $n_u = n_v > 0$.

Aus (14. 8, 9, 10, 11) folgt, wenn man

$$f_c > 1 \quad \text{und} \quad h_c > 1 \quad \text{für } c > 1$$

berücksichtigt,

(14. 13) $\quad h_{c-1} = h_c - 1 = h_{c+1} \quad \text{für } g = 2c + 1 \text{ und } c > 1,$

ferner

$$f_{c+1} = f_c - 1 > 0 \quad \text{und} \quad h_{c+1} < h_c \quad \text{für } g = 2c \text{ und } c > 1.$$

Aus (14. 8, 9) folgt

$$h_{a+1} : h_a = (f_{a+1} - 1) : f_a < f_{a+1} : f_a$$

und

$$h_a : h_{a-1} = f_{a+1} : (f_a - 1) > f_{a+1} : f_a,$$

somit

$$h_a : h_{a-1} > h_{a+1} : h_a \quad \text{für } a = 2, \ldots, c \text{ und } c > 1.$$

Nun ist $h_c : h_{c-1} \geqq 1$ nach (14. 10, 13) für $c > 1$. Demnach gilt

$$h_a > h_{a-1} \quad \text{für } a = 2, \ldots, (c-1) \text{ und } c > 2,$$

und

$$f_{a+1} - 1 > f_a \quad \text{für } a = 1, \ldots, (c-2) \text{ und } c > 2,$$

was durch

$$f_c - 1 \geqq f_{c-1} \quad \text{für } c > 1$$

zu ergänzen ist.

c. In (13. 10, 11) sollen P *durch* R, n_u *und* n_v *ausgedrückt* werden, wobei ich mich auf $g_0 = 1$ beschränke. Ich forme (13. 10, 11) mittels (14. 3, 4) identisch um und beachte die Eigenschaften der $f_a(\pi : g)$ und $h_a(\pi : g)$. *Für die Halbebene* erhalte ich

$$4\pi \cdot P = -\log R^2 + \log (R^2 + 4\, n_u n'_u). \tag{14. 14}$$

Ferner gewinne ich *für den Winkelraum* $e = \pi : g$ *zweier Geraden*

$$\begin{aligned}
(14.\ 15)\quad 4\pi \cdot P = {} & -\log R^2 + \log (R^2 + 4\, n_u n'_u) + \log (R^2 + 4\, n_v n'_v) \\
& + \Sigma_a \big(-\log (R^2 + 4 f_a n_u n'_u + 4 f_a n_v n'_v + 4 h_{a-1} n_u n'_v + 4 h_a n_v n'_u) \\
& \quad -\log (R^2 + 4 f_a n_u n'_u + 4 f_a n_v n'_v + 4 h_a n_u n'_v + 4 h_{a-1} n_v n'_u) \\
& \quad +\log (R^2 + 4 f_{a+1} n_u n'_u + 4 f_a n_v n'_v + 4 h_a n_u n'_v + 4 h_a n_v n'_u) \\
& \quad +\log (R^2 + 4 f_a n_u n'_u + 4 f_{a+1} n_v n_v + 4 h_a n_u n'_v + 4 h_a n_v n'_u) \big) \\
& + \text{entweder } \big(-\log (R^2 + 4 f_c n_u n'_u + 4 f_c n_v n'_v + 4 h_{c-1} n_u n'_v + 4 h_c n_v n'_u) \\
& \quad -\log (R^2 + 4 f_c n_u n'_u + 4 f_c n_v n'_v + 4 h_c n_u n'_v + 4 h_{c-1} n_v n'_u) \\
& \quad +\log (R^2 + 4 f_c n_u n'_u + 4 f_c n_v n'_v + 4 h_c n_u n'_v + 4 h_c n_v n'_u) \big) \\
& \qquad \text{für } g = 2c+1, \\
& \text{oder } \big(-\log (R^2 + 4 f_c n_u n'_u + 4 f_c n_v n'_v + 4 h_c n_u n'_v + 4 h_c n_v n'_u) \big) \\
& \qquad \text{für } g = 2c;
\end{aligned}$$

hierin ist Σ_a zu streichen, wenn $c = 1$ ist, und ist Σ_a von $a = 1$ bis $(c-1)$ zu nehmen, wenn $c = 2, 3, \ldots$ ist.

Alle Logarithmen in P sind von der Form

$$\log (R^2 + 4 f n_u n'_u + 4 h n_v n'_v + 4 i n_u n'_v + 4 j n_v n'_u);$$

dabei sind vier Fälle möglich:

$$\begin{aligned}
& f = h = i = j = 0, \\
& f = 1 \quad \text{und} \quad h = i = j = 0, \\
& h = 1 \quad \text{und} \quad f = i = j = 0, \\
& f \text{ und } h \geqq 1 \quad \text{nebst} \quad i \text{ und } j \geqq 0.
\end{aligned} \tag{14. 16}$$

Der erste bzw. zweite, dritte Fall von (14. 16) führt auf den 1. bzw. 2., 3. log in (14. 15) und der vierte Fall kennzeichnet alle übrigen Logarithmen. Während

(14. 15) auf dem Prinzip der wiederholten Spiegelung an d_u und d_v beruht, gliedere ich P durch folgende identische Umformung (14. 16′) in die sich am Rand d_u und d_v ausgleichenden Logarithmenpaare.

$$
\begin{aligned}
(14.\,16') \qquad & 4\pi \cdot P = 4\pi \cdot P\,(n_u, n_v; n'_u, n'_v) \\
& = \Sigma_a \big(- \log (R^2 + 4 f_a n_u n'_u + 4 f_a n_v n'_v + 4 h_{a-1} n_u n'_v + 4 h_a n_v n'_u) \\
& \qquad + \log (R^2 + 4 f_{a+1} n_u n'_u + 4 f_a n_v n'_v + 4 h_a n_u n'_v + 4 h_a n_v n'_u) \\
& \qquad - \log (R^2 + 4 f_{a+1} n_u n'_u + 4 f_{a+1} n_v n'_v + 4 h_{a+1} n_u n'_v + 4 h_a n_v n'_u) \\
& \qquad + \log (R^2 + 4 f_a n_u n'_u + 4 f_{a+1} n_v n'_v + 4 h_a n_u n'_v + 4 h_a n_v n'_u) \big) \\
& + (g - 2c) \cdot \big(- \log (R^2 + 4 f_c n_u n'_u + 4 f_c n_v n'_v + 4 h_{c-1} n_u n'_v + 4 h_c n_v n'_u) \\
& \qquad + \log (R^2 + 4 f_c n_u n'_u + 4 f_c n_v n'_v + 4 h_c n_u n'_v + 4 h_c n_v n'_u) \big) \\
& \qquad \text{für } a = 0, \ldots, (c-1)
\end{aligned}
$$

und ebenso

$$4\pi \cdot P = 4\pi \cdot P\,(n_v, n_u; n'_v, n'_u).$$

In $P\,(0, n_v; n'_u, n'_v)$ und $P(0, n_u; n'_v, n'_u)$ verschwindet die Summe der beiden ersten und ebenso die der beiden letzten Logarithmen von jeder einzelnen Klammer (. . .) in Σ_a; ebenso verschwindet gegebenenfalls beidemal die letzte Klammer (. . .). Ähnlicherweise verschwindet in $P\,(n_u, n_v; n'_u, 0)$ und $P(n_v, n_u; n'_v, 0)$ die Summe des ersten und letzten Logarithmus, ferner ebenso die der beiden mittleren Logarithmen von jeder einzelnen Klammer (. . .) in Σ_a; ebenso verschwindet gegebenenfalls beidemal die letzte Klammer (. . .). Somit ist $P = 0$, wenn eine der Größen n_u, n_v, n'_u, n'_v verschwindet. Diejenigen g Paare von Logarithmen, von denen jedes Paar für etwa $n_u = 0$ verschwindet, haben die Form

$$
\begin{aligned}
& - \log (R^2 + 4 p n_u n'_u + 4 p n_v n'_v + 4 q n_u n'_v + 4 r n_v n'_u) \\
& + \log (R^2 + 4 k n_u n'_u + 4 p n_v n'_v + 4 r n_u n'_v + 4 r n_v n'_u);
\end{aligned}
$$

dabei sind vier Fälle möglich:

(14. 17)
$$
\begin{aligned}
& k = 1 \text{ und } p = q = r = 0, \\
& k \geqq p \geqq 1 \text{ und } r \geqq q \geqq 0, \\
& p = 1 \text{ und } k = r = 0 \text{ nebst } q \geqq 0, \\
& p \geqq k \geqq 1 \text{ und } q \geqq r \geqq 0;
\end{aligned}
$$

dazu tritt stets

(14. 18)
$$(p - k)^2 + (q - r)^2 > 0.$$

Demnach gilt in allen Fällen

(14. 19)
$$(p - k)\,(q - r) \geqq 0.$$

Entsprechendes gilt betreffs

$$n_v = 0, \quad n'_u = 0 \quad \text{und} \quad n'_v = 0.$$

15. P für Rechteck, gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, gleichseitiges Dreieck und halbes gleichseitiges Dreieck.

a. Bevor ich eine Parametrix P für den eckenfreien Ausgangsbereich b_0 und ein P für den (im allgemeinen nicht geradlinig begrenzten) Bereich $b(\pi: g_1, g_2, \ldots, g_p)$ mit den Eckenwinkeln $\pi:g_1$, $\pi:g_2$, $\ldots$, $\pi:g_p$ (die $g_1, \ldots, g_p$ irgendwelche ganze positive Zahlen größer als eins) aus den bisher in (14. 14, 15) angegebenen P bilde, baue ich aus letzteren P die Parametrizes für alle diejenigen $b = b(\pi:g_1, g_2, \ldots, g_p)$ auf, die von Geradenstücken begrenzt werden. Denn für solche P werde ich im Hinblick auf die Auflösungstheorie für

$$\Delta U = F \text{ in } (b - d) \quad \text{und} \quad U = 0 \text{ auf } d \tag{15. 1}$$

besonders günstige Eigenschaften feststellen; darauf komme ich in Nr. 19b XVII zurück. Es gibt genau vier solcher b, nämlich

I. Rechteck $b(\pi:2, 2, 2, 2)$,
II. gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck $b(\pi:2, 4, 4)$,
III. gleichseitiges Dreieck $b(\pi:3, 3, 3)$,
IV. halbes gleichseitiges Dreieck $b(\pi:2, 3, 6)$.

Denn die Winkelsumme geradliniger Vielecke mit p Winkeln $e_w = \pi : g_w$ ist $\Sigma_w(\pi : g_w) = \pi(p - 2)$ für $w = 1, \ldots, p$, $p \geqq 3$; setzt man hierin die zulässigen Werte $g_w = 2, 3, \ldots$ in allen möglichen Zusammenstellungen ein, so kommt man auf obige vier Fälle. Wegen $e_w = \pi : g_w$ sind hier nur einfachzusammenhängende b möglich.

Das Rechteck bzw. jedes der drei genannten Dreiecke bestehe aus den Geraden d_u für $u = 1, \ldots, 4$ bzw. $u = 1, 2, 3$. Gelegentlich schreibe ich $(u + 4)$ bzw. $(u + 3)$ anstatt u. $t(\underline{u})$ bedeute beim Rechteck die Normalprojektion von t auf d_u und bei den Dreiecken die Zentralprojektion von t von der d_u gegenüberliegenden Ecke aus auf d_u (Fig. 7 bis 10). $t(\underline{u}, \underline{v})$ sei der Schnittpunkt von d_u und d_v; $v = 1, \ldots, 4$ bzw. $v = 1, 2, 3$. Man schreibe $M(\underline{u}, \underline{v}, r, \ldots, p)$ bzw. $S(\underline{u}, \underline{v}, r, \ldots, p; \underline{u}', \underline{v}', r', \ldots, p')$, wenn man $t = t(\underline{u}, \underline{v}, r, \ldots, p)$ und $t' = t'(\underline{u}', \underline{v}', r', \ldots, p')$ in irgendeine Funktion $M = M(t)$ bzw. $S = S(t, t')$ einsetzt. Hierbei können beliebigviele der Zeichen $u, v, r, \ldots, p$ bzw. $\underline{u}', v', r', \ldots, p'$ bis auf eines gestrichen werden. Soll in einem Σ jeder nach dem Bildungsgesetz mehrfach vorkommende Summand nur einmal gezählt werden, so schreibe ich Σ_0 anstatt Σ.

Als den *sich singulär verhaltenden Bestandteil von* P bestimme ich mittels (14. 16′)

$$S_0 = \Sigma_{0u} P(n_u, n_{u+1}; n'_u, n'_{u+1}) \quad \text{für } u = 1, \ldots, 4 \text{ bzw. } 3,$$

wenn das Rechteck bzw. eines der drei angegebenen Dreiecke vorliegt; die Einzelangaben werden in Nr. 15c nachgetragen; insbesondere wird S_0 daselbst

in den jeweils *ersten* geschweiften Klammern von I bis IV ausführlich angeschrieben; dabei genügt es in vorliegender Nr. 15, die ursprüngliche

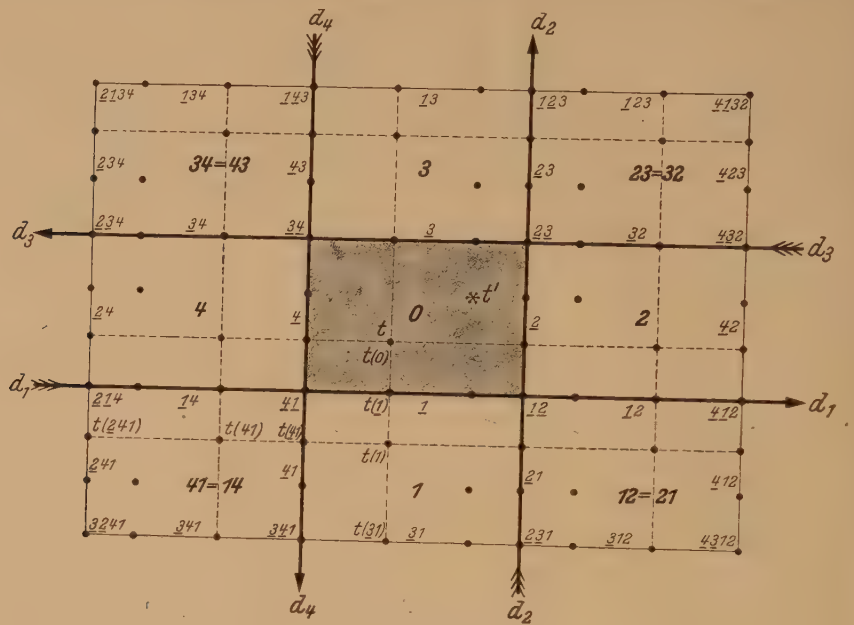

Fig. 7. Spiegelung beim Rechteck b $(\pi : 2, 2, 2, 2)$.

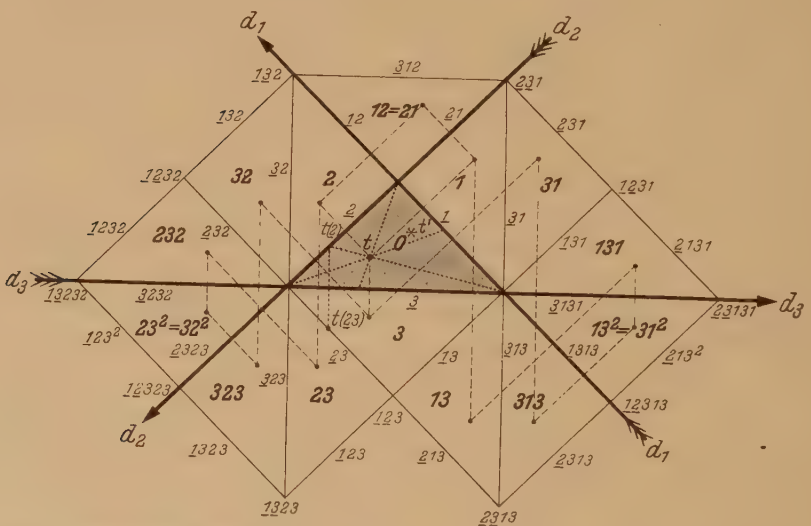

Fig. 8. Spiegelung beim gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck b $(\pi : 2, 4, 4)$.

Form (13. 11) an Stelle der identischen Umformungen (14. 16′) und (14. 15) der Darstellung zugrunde zu legen. S_0 hat im Fall $E = \Delta + T$ die für P

in Nr. 13 b angegebenen allgemeinen Eigenschaften bis auf das Randverhalten von P. Anstatt letzterem ist allgemeiner $S_0 \neq 0$ und S_0 beliebig

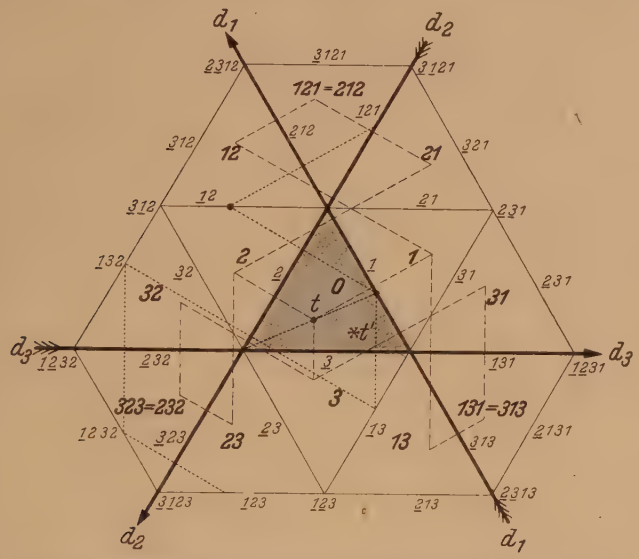

Fig. 9. Spiegelung beim gleichseitigen Dreieck b ($\pi : 3, 3, 3$).

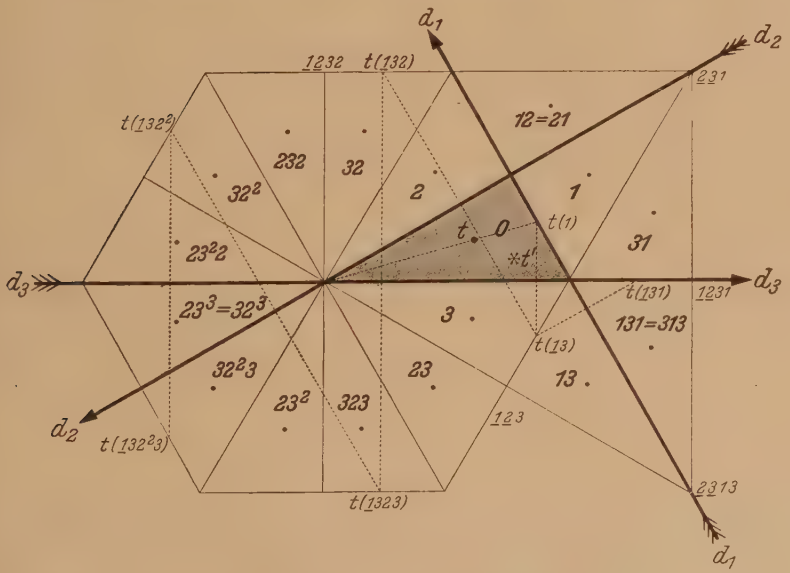

Fig. 10. Spiegelung beim halben gleichseitigen Dreieck b ($\pi : 2, 3, 6$).

oft differenzierbar für t und t' einschließlich $R = 0$, wenn t oder t' auf den Rand d beschränkt wird. Denn nähert sich t bzw. t' einem endlich

großen Stück von d, das die Ecke $t(\underline{v}, \underline{v+1})$ im Innern enthält und nicht bis zu einer weiteren Ecke reicht, oder einem Stück von d_v, das beide Ecken ausschließt, so sind alle für $R \to 0$ sich singulär verhaltenden Glieder von S_0 in dem nach Null strebenden $P(n_v, n_{v+1}; n'_v, n'_{v+1})$ enthalten. $S_0 - P(n_v, n_{v+1}; n'_v, n'_{v+1})$ wird dann jedoch beliebig oft differenzierbar für t und t' einschließlich $R = 0$.

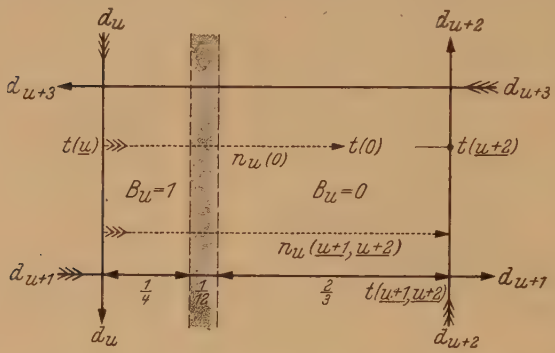

Fig. 11. Faktorfunktion für das Rechteck.

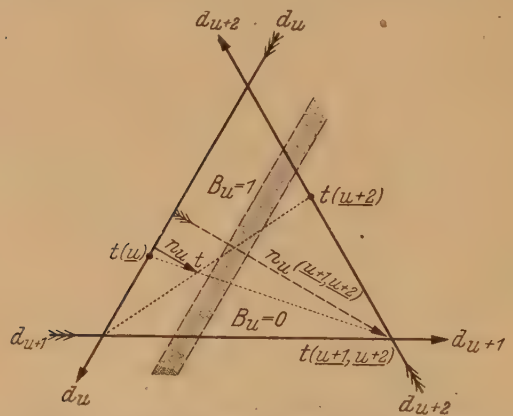

Fig. 12. Faktorfunktion für das gleichseitige Dreieck.

b. Nach diesem ersten Schritt der Bildung des singulären Bestandteiles S_0 von P gebe ich in $(P - S_0)$ eine in b einschließlich $R = 0$ mindestens dreimal nach (x, y, x', y') stetig differenzierbare Funktion an, welche die stetigen Randwerte von S_0 zu 0 ausgleicht, damit P die Randbedingungen (12. 3) erfüllt. Hierzu führe ich die „Faktorfunktion" B_u für $u = 1, \ldots, 4$ (Rechteck) bzw. $u = 1, 2, 3$ (Dreieck) ein. Für u steht gelegentlich auch $(u + 4)$ bzw. $(u + 3)$. Es sei $B_u = B_u(t)$ eine Funktion von t im Rechteck oder in einem der drei angegebenen Dreiecke, die (Fig. 11 und 12)

$$B_u = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq n_u \leqq \tfrac{1}{4}\, n_u(\underline{u+1}, \underline{u+2})$$

und

$$B_u = 0 \quad \text{für} \quad n_u \geqq \tfrac{1}{3}\, n_u(\underline{u+1}, \underline{u+2})$$

genügt. Im übrigen sei B_u c-mal stetig differenzierbar, wobei c eine beliebige ganze Zahl bedeute, die $c \geqq 3$ genügt. Dann gilt (— und das ist der Sinn der vorstehenden oder einer ähnlich möglichen Definition —)

$B_u(\underline{u}) = 1$ im Rechteck und Dreieck, ferner

$B_u(\underline{u+2}) = 0$ und $B_u(0) \cdot B_{u+2}(0) = 0$ im Rechteck, schließlich

$B_u(\underline{u+2}) \cdot B_{u+1}(\underline{u+2}) = 0$ im Dreieck.

Aus S_0 bilde ich nacheinander

$$S_v = S_{v-1} - \Sigma_{0u}(B_u \cdot S_{v-1,u} + B'_u \cdot S''_{v-1,u}) \quad \text{für } v = 1, 2, 3, 4;$$

hierin soll $S_{v-1,u}$ dadurch aus $S_{v-1}(\underline{u}; 0)$ gewonnen werden, daß man die $B_w(\underline{u})$ in $S_{v-1}(\underline{u}; 0)$ durch $B_w(0) = B_w$ ersetzt; $w = u + 1$ und $w = u + 3$ beim Rechteck, $w = u + 1$ und $w = u + 2$ bei den Dreiecken. Σ_0 wurde vor S_0 eingeführt; insbesondere ist hier $\Sigma_{0u}(\ldots) = \Sigma_u(\ldots)$ nur für $v = 1$. Ferner fallen $\Sigma_{0u} B'_u \cdot S''_{2,u}$ und $\Sigma_{0u} B'_u \cdot S''_{3,u}$ weg, da diese Summen gleich ihren transponierten Werten sind. Die Funktionen $\Sigma_{0u}(\ldots)$ sind die in Nr. 15c in den jeweils zweiten bis fünften geschweiften Klammern von I bis IV angegebenen Funktionen. ($S_3 - S_2$ ist für die drei Dreiecke formal der gleiche Wert.) Dann bestimme ich

$$P = S_4 \tag{15. 2}$$

als Parametrix für das Rechteck oder eines der drei genannten Dreiecke im Fall $E = \Delta + T$.

Aus der *allgemeinen Bildungsweise von* P und ebenso aus der in Nr. 15c nachgetragenen Durchführung für jeden einzelnen der genannten speziellen Bereiche $b(\pi : g_1, \ldots, g_p)$ ergeben sich folgende *Eigenschaften* von P. $(P - S_0)$ bzw. P ist c-mal stetig differenzierbar nach (x, y, x', y') für t und t' in b einschließlich bzw. ausschließlich $R = 0$; $c \geqq 3$. Es ist $P \lesssim 1 + |\log R|$ und die m-ten Ableitungen von P sind $\lesssim 1 : R^m$ für $m = 1, 2, \ldots, c$. Die möglichen Ableitungen von ΔP nach (x, y, x', y') sind in bezug auf x und y von höchstens $(c - 2)$-ter Ordnung, jedoch in bezug auf x' und y' von höchstens c-ter Ordnung. Die danach zulässigen n-ten Ableitungen[5]) sind stetig für t und t' in b einschließlich $R = 0$. Ferner ist $(4\pi \cdot P + \log R^2)$ c-mal stetig differenzierbar nach (x, y, x', y') für t in $(b - d)$ und t' in b einschließlich $R = 0$. Es gilt $P = P''$. Schließlich erfüllt P die Randbedingungen (12. 3). Das Randverhalten von P wurde in den 4 Schritten für $v = 1, 2, 3, 4$ erreicht. Es fußt auf den Eigenschaften von B_u und auf elementargeometrischen Hilfsformeln, die aus (13. 1) folgen. Beispielsweise gelten beim Rechteck

$$\begin{aligned} R(\underline{u}, v; \underline{u}) &= R(\underline{u+2}, v; \underline{u+2}), \\ R(\underline{u}, v; \underline{u+2}) &= R(\underline{u+2}, v; \underline{u}), \\ R(\underline{u}, u+2, v; \underline{u}) &= R(\underline{u+2}, u, v; \underline{u+2}) \end{aligned}$$

für $u = 1$ und $v = 0, 2, 4$ oder $u = 2$ und $v = 0, 1, 3$

und ähnliche Formeln. Entsprechende Hilfsformeln gelten bei den Dreiecken.

---

[5]) Im Fall $c = 3$ ist beispielsweise $(\Delta P)_{x'y'xx'}$, wobei $n = 4$ ist, zulässig, aber $(\Delta P)_{xx}$, wobei $n = 2$ ist, unzulässig.

c. *Einzelangaben der* P im Fall $E = \Delta + T$. Dabei wird jedes P in fünf geschweifte Klammern aufgeteilt; die erste derselben stellt jeweils das in Nr. 15a eingeführte S_0 dar, die zweite bis fünfte Klammer die in Nr. 15b bestimmte Funktion

$$-(S_v - S_{v-1}) = +\Sigma_{0u}(B_u \cdot S_{v-1,u} + B'_u \cdot S''_{v-1,u}) \quad \text{für } v = 1 \text{ bis } 4.$$

I. $b = b(\pi : 2, 2, 2, 2)$ *sei das Rechteck.* Dann ist (Fig. 7)

$$\begin{aligned}
4\pi \cdot P = {} & \Big\{ -\log R^2(0;0) + \Sigma_u \log R^2(0;u) - \Sigma_u \log R^2(0;u,u+1) \Big\} - \\
& - \Big\{ \Sigma_u B_u \cdot (\log R^2(\underline{u}, u+2;0) - \log R^2(\underline{u}, u+2, u+1;0) - \\
& \qquad - \log R^2(\underline{u}, u+2, u+3;0)) + \\
& + \Sigma_u B'_u \cdot (\log R^2(0;\underline{u}, u+2) - \log R^2(0;\underline{u}, u+2, u+1) - \\
& \qquad - \log R^2(0;\underline{u}, u+2, u+3)) \Big\} - \\
& - \Big\{ \Sigma_u B_u B_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}, u+2, u+3;0) + \\
& + \Sigma_u B'_u B'_{u+1} \cdot \log R^2(0;\underline{u}, \underline{u+1}, u+2, u+3) + \\
& + (B_1 B'_1 + B_3 B'_3) \cdot (-\log R^2(\underline{1};\underline{1},3) + \log R^2(\underline{1};\underline{1},3,2) + \\
& \qquad + \log R^2(\underline{1};\underline{1},3,4)) + \\
& + (B_2 B'_2 + B_4 B'_4) \cdot (-\log R^2(\underline{2};\underline{2},4) + \log R^2(\underline{2};\underline{2},4,3) + \\
& \qquad + \log R^2(\underline{2};\underline{2},4,1)) + \\
& + (B_1 B'_3 + B_3 B'_1) \cdot (-\log R^2(\underline{1};\underline{3}) + \log R^2(\underline{1};\underline{3},2) + \log R^2(\underline{1};\underline{3},4)) + \\
& + (B_2 B'_4 + B_4 B'_2) \cdot (-\log R^2(\underline{2};\underline{4}) + \log R^2(\underline{2};\underline{4},1) + \log R^2(\underline{2};\underline{4},3)) + \\
& + \Sigma_u B_u B'_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u};\underline{u+1}, u+2, u+3) + \\
& + \Sigma_u B_{u+1} B'_u \cdot \log R^2(\underline{u+1}, u+2, u+3;\underline{u}) \Big\} - \\
& - \Big\{ -\Sigma_u B_u (B_{u+1} B'_{u+1} + B_{u+3} B'_{u+3}) \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1};\underline{u+1}, u+2, u+3) - \\
& - \Sigma_u B_u (B_{u+1} B'_{u+3} + B_{u+3} B'_{u+1}) \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1};\underline{u+3}, u+2) - \\
& - \Sigma_u B'_u (B'_{u-1} B_{u+1} + B'_{u+3} B_{u+3}) \cdot \log R^2(\underline{u+1}, u+2, u+3;\underline{u}, \underline{u+1}) - \\
& - \Sigma_u B'_u (B'_{u+1} B_{u+3} + B'_{u+3} B_{u-1}) \cdot \log (R^2(\underline{u+3}, u+2;\underline{u}, u+1) \Big\} - \\
& - \Big\{ (B_1 B'_1 + B_3 B'_3)(B_2 B'_2 + B_4 B'_4) \cdot \log R^2(\underline{1},\underline{2};\underline{1},\underline{2},3,4) + \\
& + (B_1 B'_1 + B_3 B'_3)(B_2 B'_4 + B_4 B'_2) \cdot \log R^2(\underline{1},\underline{2};\underline{4},\underline{1},3) + \\
& + (B_1 B'_3 + B_3 B'_1)(B_2 B'_2 + B_4 B'_4) \cdot \log R^2(\underline{1},\underline{2};\underline{2},\underline{3},4) + \\
& + (B_1 B'_3 + B_3 B'_1)(B_2 B'_4 + B_4 B'_2) \cdot \log R^2(\underline{1},\underline{2};\underline{3},\underline{4}) \Big\}.
\end{aligned}$$

Eine zweite Form von P für ein Rechteck findet sich in (17. 2).

II. $b = b(\pi : 2, 4, 4)$ *sei das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck*, wobei d_1 und d_2 den Winkel $e = \pi : 2$ einschließen. Dann ist (Fig. 8)

$$
\begin{aligned}
4\pi \cdot P = \Big\{ & - \log R^2(0;0) + \Sigma_u \log R^2(0;u) - \log R^2(0;1,2) - \\
& - (\log R^2(0;1,3) + \log R^2(0;3,1) - \log R^2(0;1,3,1) - \log R^2(0;3,1,3) + \\
& \qquad + \log R^2(0;13^2)) - \\
& - (\log R^2(0;2,3) + \log R^2(0;3,2) - \log R^2(0;2,3,2) - \log R^2(0;3,2,3) + \\
& \qquad + \log R^2(0;23^2)) \Big\} \\
- \Big\{ & - B_3 \cdot \log R^2(\underline{3},1,2;0) + \\
& + B_2 \cdot (- \log R^2(\underline{2},1,3;0) - \log R^2(\underline{2},3,1;0) + \log R^2(\underline{2},1,3,1;0) + \\
& \qquad + \log R^2(\underline{2},3,1,3;0) - \log R^2(\underline{2},13^2;0)) + \\
& + B_1 \cdot (- \log R^2(\underline{1},2,3;0) - \log R^2(\underline{1},3,2;0) + \log R^2(\underline{1},2,3,2;0) + \\
& \qquad + \log R^2(\underline{1},3,2,3;0) - \log R^2(1,23^2;0)) + \\
& + (\text{elf hierzu transponierte logarithmische Ausdrücke mit den Faktoren} \\
& \quad B_3', B_2' \text{ und } B_1') \Big\} - \\
- \Big\{ & \Sigma_u B_u B_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}, u+2;0) + \\
& + \Sigma_u B_u' B_{u+1}' \cdot \log R^2(0;\underline{u},\underline{u+1},u+2) + \\
& + B_3 B_3' \cdot \log R^2(\underline{3},1,2;\underline{3}) + \\
& + B_2 B_2' \cdot (\log R^2(\underline{2},1,3;\underline{2}) + \log R^2(\underline{2},3,1;\underline{2}) - \log R^2(\underline{2},1,3,1;\underline{2}) - \\
& \qquad - \log R^2(\underline{2},3,1,3;\underline{2}) + \log R^2(\underline{2},13^2;\underline{2})) + \\
& + B_1 B_1' \cdot (\log R^2(\underline{1},2,3;\underline{1}) + \log R^2(\underline{1},3,2;\underline{1}) - \log R^2(\underline{1},2,3,2;\underline{1}) - \\
& \qquad - \log R^2(\underline{1},3,2,3;\underline{1}) + \log R^2(\underline{1},23^2;\underline{1})) + \\
& + \Sigma_u B_u B_{u+1}' \cdot \log R^2(\underline{u};\underline{u+1},u+2) + \\
& + \Sigma_u B_u' B_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u+1},u+2;\underline{u}) \Big\} - \\
- \Big\{ & - \Sigma_u \Sigma_v B_u B_{u+1} B_v' \cdot \log R^2(\underline{u},\underline{u+1},u+2;\underline{v}) - \\
& - \Sigma_u \Sigma_v B_u' B_{u+1}' B_v \cdot \log R^2(\underline{v};\underline{u},\underline{u+1},u+2) \Big\} - \\
- \Big\{ & (B_1 B_2 B_1' B_3' + B_1 B_2 B_2' B_3' + B_1 B_3 B_1' B_2' + B_2 B_3 B_1' B_2') \cdot \log R^2(\underline{1},\underline{2};\underline{3},\underline{1}) + \\
+ & (B_1 B_2 B_1' B_2' + B_1 B_3 B_2' B_3' + B_2 B_3 B_1' B_3') \cdot \log R^2(\underline{3},\underline{1};\underline{2},\underline{3}) + \\
+ & (B_1 B_3 B_1' B_3' + B_2 B_3 B_2' B_3') \cdot \log R^2(\underline{2},\underline{3};\underline{2},\underline{3},1) \Big\}.
\end{aligned}
$$

III. $b = b(\pi : 3, 3, 3)$ *sei das gleichseitige Dreieck.* Dann ist (Fig. 9)

$$4\pi \cdot P = \Big\{ - \log R^2(0; 0) + \Sigma_u \log R^2(0; u) - \Sigma_u \log R^2(0; u, u+1) -$$
$$- \Sigma_u \log R^2(0; u+1, u) + \Sigma_u \log R^2(0; u, u+1, u) \Big\} -$$
$$- \Big\{ \Sigma_u B_u \cdot (- \log R^2(\underline{u}, u+1, u+2; 0) - \log R^2(\underline{u}, u+2, u+1; 0) +$$
$$+ \log R^2(\underline{u}, u+1, u+2, u+1; 0)) +$$
$$+ \Sigma_u B'_u \cdot (- \log R^2(0; \underline{u}, u+1, u+2) - \log R^2(0; \underline{u}, u+2, u+1) +$$
$$+ \log R^2(0; \underline{u}, u+1, u+2, u+1)) \Big\} -$$
$$- \Big\{ \Sigma_u B_u B_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}, u+2; 0) +$$
$$+ \Sigma_u B'_u B'_{u+1} \cdot \log R^2(0; \underline{u}; \underline{u+1}, u+2) +$$
$$+ \Sigma_u B_u B'_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u}; \underline{u+1}, u+2) +$$
$$+ \Sigma_u B'_u B_{u+1} \cdot \log R^2(u+1, u+2; \underline{u}) +$$
$$+ \Sigma_u B_u B'_u \cdot (\log R^2(\underline{u}; \underline{u}, u+1, u+2) + \log R^2(\underline{u}; \underline{u}, u+2, u+1) -$$
$$- \log R^2(\underline{u}; \underline{u}, u+1, u+2, u+1)) \Big\} -$$
$$- \Big\{ - \Sigma_u \Sigma_v B_u B_{u+1} B'_v \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}, u+2; \underline{v}) -$$
$$- \Sigma_u \Sigma_v B'_u B'_{u+1} B_v \cdot \log R^2(\underline{v}; \underline{u}, \underline{u+1}, u+2) \Big\} -$$
$$- \Big\{ (B_1 B_2 B'_2 B'_3 + B_1 B_2 B'_3 B'_1 + B_2 B_3 B'_1 B'_2 + B_2 B_3 B'_3 B'_1 +$$
$$+ B_3 B_1 B'_1 B'_2 + B_3 B_1 B'_2 B'_3) \cdot \log R^2(\underline{1}, \underline{2}; \underline{3}, \underline{1}) +$$
$$+ (B_1 B_2 B'_1 B'_2 + B_2 B_3 B'_2 B'_3 + B_3 B_1 B'_3 B'_1) \cdot \log R^2(\underline{1}, \underline{2}; \underline{1}, \underline{2}, 3) \Big\}.$$

Eine zweite Form von P für ein gleichseitiges Dreieck findet sich in Nr. 17b.

IV. $b = b(\pi : 2, 3, 4)$ *sei das halbe gleichseitige Dreieck,* wobei d_1 und d_2 den Winkel $e = \pi : 2$, ferner d_1 und d_3 den Winkel $e = \pi : 3$, also d_2 und d_3 den Winkel $e = \pi : 6$ einschließen. Dann ist (Fig. 10)

$$4\pi \cdot P = \Big\{ - \log R^2(0; 0) + \Sigma_u \log R^2(0; u) - \log R^2(0; 1, 2) -$$
$$- (\log R^2(0; 1, 3) + \log R^2(0; 3, 1) - \log R^2(0; 1, 3, 1)) -$$
$$- (\log R^2(0; 2, 3) + \log R^2(0; 3, 2) \mp \ldots + \log R^2(0; 23^3)) \Big\} -$$
$$- \Big\{ - B_3 \cdot \log R^2(\underline{3}, 1, 2; 0) +$$
$$+ B_2 \cdot (- \log R^2(\underline{2}, 1, 3; 0) - \log R^2(\underline{2}, 3, 1; 0) + \log R^2(\underline{2}, 1, 3, 1; 0)) +$$
$$+ B_1 \cdot (- \log R^2(\underline{1}, 2, 3; 0) - \log R^2(\underline{1}, 3, 2; 0) \pm \ldots - \log R^2(\underline{1}, 23^3; 0)) +$$

$$+ \text{ (dreizehn hierzu transponierte logarithmische Ausdrücke mit den Faktoren } B'_3,\ B'_2 \text{ und } B'_1)\Big\} -$$

$$- \Big\{ \Sigma_u B_u B_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}, u+2; 0)$$

$$+ \Sigma_u B'_u B'_{u+1} \cdot \log R^2(0; \underline{u}, \underline{u+1}, u+2) +$$

$$+ B_3 B'_3 \cdot \log R^2(\underline{3}, 1, 2; \underline{3}) +$$

$$+ B_2 B'_2 \cdot (\log R^2(\underline{2}, 1, 3; \underline{2}) + \log R^2(\underline{2}, 3, 1; \underline{2}) - \log R^2(\underline{2}, 1, 3, 1; \underline{2})) +$$

$$+ B_1 B'_1 \cdot (\log R^2(\underline{1}, 2, 3; \underline{1}) + \log R^2(\underline{1}, 3, 2; \underline{1}) \mp \cdots + \log R^2(\underline{1}, 23^3; \underline{1})) +$$

$$+ \Sigma_u B_u B'_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u}; \underline{u+1}, u+2) +$$

$$+ \Sigma_u B'_u B_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u+1}, u+2; \underline{u})\Big\} -$$

$$- \Big\{ - \Sigma_u \Sigma_v B_u B_{u+1} B'_v \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}, u+2; \underline{v}) -$$

$$- \Sigma_u \Sigma_v B'_u B'_{u+1} B_v \cdot \log R^2(\underline{v}; \underline{u}, u+1, u+2)\Big\} -$$

$$- \Big\{ \Sigma_u B_u B'_u (B_{u+1} B'_{u+2} + B_{u+2} B'_{u+1}) \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}; \underline{u+2}, \underline{u}) +$$

$$+ \Sigma_u B_u B_{u+1} B'_u B'_{u+1} \cdot \log R^2(\underline{u}, \underline{u+1}; \underline{u}, \underline{u+1}, u+2)\Big\}.$$

16. P für eckenfreie Bereiche.

a. Zur Bildung von Parametrizes P für eckenfreie Bereiche $b = b_0$ (Fig. 1 in Nr. 12b) bei dem allgemeinen elliptischen Differentialausdruck E ersetze ich in dem in (14. 14) angegebenen P für die Halbebene die Funktion $n_u = n_u(t)$ durch folgende Funktion $J = J(t)$ und ferner R^2 durch $(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) : 2$. Dabei bestimme ich

$$Q = Q(t, t') \geqq 0$$

und

$$Q^2 = C \cdot (x - x')^2 - 2\,B \cdot (x - x')\,(y - y') + A \cdot (y - y')^2$$

für $AC - B^2 = 1$ und $A > 0$. Es ist $Q'' = Q(t', t)$. Für $E = \Delta + T$ wird $Q = R$. Es sei $J > 0$ in $(b_0 - d_0)$, weiter $J \simeq n$ im Randstreifensystem $0 \leqq n \leqq m$ und $0 \leqq s \leqq s_c$ (vgl. Nr. 9b), ferner J größer als eine hinreichend klein gewählte positive Konstante im übrigen b_0; dabei kann und soll m im Hinblick auf spätere Randabschätzungen durch $\log n$ von vornherein so klein gewählt werden, daß $\log n$ nirgends verschwindet; ich fordere daher zusätzlich von m, daß m kleiner sei als eine positive Konstante, die selbst kleiner als eins ist[6]). Sonst sei J dreimal stetig differenzierbar in b_0, abgesehen von einer

---

[6]) Das ist keine wesentliche Voraussetzung, sondern nur eine Bequemlichkeitsforderung. Andernfalls wären alle Abschätzungen mittels $\log n$ durch die mittels $(1 + |\log n|)$ zu ersetzen. Diese zusätzliche Einschränkung von m bedeutet keinerlei Einschränkung von b_0. (Vgl. dagegen die Fußnote zu Nr. 12a I.)

wie bei n möglichen Doppeldeutigkeit der Ableitungen in den Doppelstücken von d_0 (vgl. Nr. 9 b). Somit führe ich durch den Ansatz

$$4\pi \cdot H = -\log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8JJ') \tag{16.1}$$

eine *Funktion* H ein, die *allgemeiner* ist *als* die nachfolgend durch Einschränkung von J gebildete *Parametrix* P_0 *für* b_0.

b. Hierzu ist im Hinblick auf die dem Randwertproblem zuzuordnende Integralgleichung (12. 2), für deren Kern (12. 1) angestrebt wird, vor allem EH *abzuschätzen*. Das geschieht in nachfolgenden vier Schritten:

(I) Die Argumente der in H auftretenden Logarithmen werden durch $(R^2 + JJ')$ und diese Summe wird durch $(R + J)^2$ abgeschätzt.

(II) Die Logarithmen selbst, ferner deren zulässige Ableitungen und insbesondere der Differentialausdruck $(EH - DH)$ werden abgeschätzt.

(III) Weiter werden die Differentialausdrücke D von Differenzen gewisser Logarithmen, in die sich EH zerlegen läßt, abgeschätzt.

(IV) Als „kritischer" und daher wichtigster Beitrag zur Abschätzung von EH wird $D\log(Q^{2\prime\prime} + 4JJ')$ festgestellt und abgeschätzt.

(V) Die Teilabschätzungen (II) bis (IV) werden zur endgültigen Abschätzung von EH zusammengesetzt.

I. Allgemein folgt aus $AC - B^2 > 0$ und $A > 0$ für zwei beliebige, reelle, endliche Zahlen g und h, daß [7])

$$\begin{aligned}(AC - B^2)\cdot(g^2 + h^2) &\leqq (A + C)\cdot(A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2)\\ &\leqq (A + C)^2\cdot(g^2 + h^2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(AC - B^2)\cdot(A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2) &\leqq (A + C)\cdot(AC - B^2)\cdot(g^2 + h^2)\\ &\leqq (A + C)^2\cdot(A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2),\end{aligned}$$

somit (vgl. Fußnote zu Nr. 12 a I)

$$A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2 \sim g^2 + h^2$$

gilt. Folglich besteht $Q \cong R$, weiter

$$Q^2 + Q^{2\prime\prime} \cong R^2 \quad \text{und} \quad Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8JJ',\ Q^2 + 4JJ',\ Q^{2\prime\prime} + 4JJ' \sim R^2 + JJ'.$$

---

[7]) Es ist $A\cdot(A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2) = (A\cdot g + B\cdot h)^2 + (AC - B^2)\cdot h^2 \geqq (AC - B^2)\cdot h^2$, ebenso $C\cdot(A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2) \geqq (AC - B^2)\cdot g^2$, also $(A + C)\cdot(A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2) \geqq (AC - B^2)\cdot(g^2 + h^2)$. Insbesondere ist $A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2 \geqq 0$, damit auch $C\cdot g^2 - 2B\cdot gh + A\cdot h^2 \geqq 0$, folglich $A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2 \leqq (A\cdot g^2 + 2B\cdot gh + C\cdot h^2) + (C\cdot g^2 - 2B\cdot gh + A\cdot h^2) = (A + C)\cdot(g^2 + h^2)$. Daher gelten die im Text angegebenen Ungleichungen.

Aus $J' = (J' - J) + J \lesseqgtr J + R$ folgt $J'^2 \lesseqgtr R^2 + J^2$, also $J'^2 \lesseqgtr R^2 + J J'$ für $J \leqq J'$. Andererseits ist $J'^2 \lesseqgtr R^2 + J J'$ für $J' \leqq J$. Daher gilt stets

$$J'^2 \lesseqgtr R^2 + J J'.$$

Ebenso ist

$$J^2 \lesseqgtr R^2 + J J'.$$

Aus $R^2 + J J' = R^2 + J^2 + J \cdot (J' - J) \lesseqgtr R^2 + J^2 + J \cdot R \eqsim R^2 + J^2$ und $R^2 + J J' \eqsim R^2 + (R^2 + J J') \gtreqless R^2 + J^2$ folgt

$$R^2 + J J' \eqsim R^2 + J^2.$$

Ebenso ist

$$R^2 + J J' \eqsim R^2 + J'^2 \eqsim (R + J)^2 \sim (R + J')^2.$$

II. Es gilt $\log (Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8 J J')$, $\log (Q^2 + 4 J J')$ und $\log (Q^{2\prime\prime} + 4 J \cdot J') \eqsim \log (R + J)$ [8]). Die möglichen Ableitungen nach (x, y, x', y') von diesen Logarithmen sind in bezug auf x und y, ebenso in bezug auf x' und y' von höchstens dritter Ordnung. Die danach zulässigen m-ten Ableitungen [9]) sind stetig für $R + J > 0$ und ferner stets $\lesseqgtr 1 : (R + J)^m \lesseqgtr 1 : R^m$. Das alles gilt auch, wenn man J durch Null ersetzt. Folglich ist, wenn man

$$DH = A' \cdot H_{xx} + 2B' \cdot H_{xy} + C' \cdot H_{yy}$$

setzt und (3. 4) (*vor* (3. 1)) berücksichtigt,

$$\begin{aligned} EH - DH = {} & (A - A') \cdot H_{xx} + 2 (B - B') \cdot H_{xy} \\ & + (C - C') \cdot H_{yy} + A_0 \cdot H_x + B_0 \cdot H_y + C_0 \cdot H \lesseqgtr 1 : R. \end{aligned}$$

III. Ich beweise, daß

$$(\log (Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8 J J') - \log (Q^{2\prime\prime} + 4 J J') - \log 2)$$

und ebenso

$$(\log (Q^2 + 4 J J') - \log (Q^{2\prime\prime} + 4 J J'))$$

eine für t und t' in b einschließlich $R + J = 0$, d. h. für R und J gleichzeitig 0, stetige Funktion ist; die m-ten Ableitungen nach (x, y, x', y') von jeder der beiden Klammern sind $\lesseqgtr 1 : (R + J)^{m-1} \lesseqgtr 1 : R^{m-1}$. Folglich ist beidemal $D(\ldots) \lesseqgtr 1 : R$. Das alles gilt auch, wenn man J' durch Null ersetzt.

---

[8]) Dabei ist die völlig unwesentliche Möglichkeit, daß eines der Argumente den Wert 1 oder zu 1 benachbarte Werte von etwa 0,9 bis 1,1 annimmt, auszuschließen; in solchem Falle genügt es zu wissen, daß dann der betreffende Logarithmus $\lesseqgtr 1$ ist.

[9]) Beispielsweise ist $\frac{\partial \log (\ldots)}{\partial x^2 \, \partial y \, \partial y'^3}$, wobei $m = 6$ ist, zulässig, aber $\frac{\partial \log (\ldots)}{\partial x'^4}$, wobei $m = 4$ ist, nicht zulässig.

Denn setzt man $z = x$ oder $z = y$ bzw. x', y', so ist

$$(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8\,JJ') \cdot (Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') \cdot (\log(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8\,JJ') - \log(Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') - \log 2)_z = (Q^2 - Q^{2\prime\prime})_z \cdot (Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') - (Q^2 - Q^{2\prime\prime}) \cdot (Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ')_z.$$

Hieraus und aus ähnlichen Formeln ergeben sich obige Behauptungen.

IV. Aus

$$(Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ')^2 \cdot D\log(Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') = 4\,J' \cdot (Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') \cdot DJ - 16\,J' \cdot (J' - J - (x' - x) \cdot J_x - (y' - y) \cdot J_y) - 16\,J'^2((A' - A) \cdot J_x^2 + 2\,(B' - B) \cdot J_x J_y + (C' - C) \cdot J_y^2) - 16\,J'^2 \cdot (A \cdot J_x^2 + 2\,B \cdot J_x J_y + C \cdot J_y^2 - 1)$$

folgt

$$D\log(Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') \lesssim \frac{J'}{(R + J')^2} + J'^2 \cdot \frac{|A \cdot J_x^2 + 2\,B \cdot J_x J_y + C \cdot J_y^2 - 1|}{(R + J')^4} \lesssim 1 : R^2 \quad \text{für} \quad R + J > 0.$$

Ersetzt man hierbei J' durch Null, so erhält man

(16. 2) $$D\log Q^{2\prime\prime} = 0 \quad \text{für} \quad R > 0.$$

V. Aus der Identität

(16. 3) $$4\pi \cdot EH = 4\pi \cdot (EH - DH) + D(\log(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8\,JJ') - \log(Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') - \log 2) - D(\log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) - \log Q^{2\prime\prime} - \log 2) + D\log(Q^{2\prime\prime} + 4\,JJ') - D\log Q^{2\prime\prime}$$

folgt

$$EH \lesssim \frac{1}{R} + \frac{|A \cdot J_x^2 + 2\,B \cdot J_x J_y + C \cdot J_y^2 - 1|}{(R + J)^2} \lesssim 1 : R^2.$$

Im allgemeinen gilt jedoch nicht (12. 1) für H anstatt P.

c. Um $EH \lesssim 1 : R$ zu erreichen, wähle ich $J = J_0$ so, daß es der Differentialbedingung

(16. 4) $$A \cdot J_{0x}^2 + 2\,B \cdot J_{0x} J_{0y} + C \cdot J_{0y}^2 - 1 \sim J_0$$

genügt. Ich setze etwa

$$J_0^2 = n^2 : (A \cdot n_x^2 + 2\,B \cdot n_x n_y + C \cdot n_y^2)$$

im Randstreifensystem von b_0 und wähle im übrigen J_0 im Rahmen der J-Eigenschaften beliebig. Das ist mit den Anforderungen an J verträglich. Insbesondere ist $J_0 = n$ und $J_{0x}^2 + J_{0y}^2 - 1 = 0$ im Randstreifensystem von b_0, wenn $E = \Delta + T$ vorliegt. Dann führe ich durch

(16. 5) $$4\pi \cdot P = 4\pi \cdot P_0 = -\log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8\,J_0 J_0')$$

die *Parametrix für b_0 bei allgemeinem E* ein. Es gilt (12. 1) für $P = P_0$. Die weiteren Eigenschaften von P_0 werden in Nr. 19 und 21 zusammengestellt.

In der Tatsache, daß in der Definition von J_0 bei allgemeinem Differentialausdruck E in der angegebenen Weise neben n noch n_x und n_y vorkommen, jedoch n_x und n_y beim Normalfall $(\Delta + T)$ wegfallen, liegt begründet, daß ich die den Rand d_0 von b_0 darstellenden Funktionen $X(s)$ und $Y(s)$ im Fall E viermal, dagegen im Fall $(\Delta + T)$ nur dreimal nach der Bogenlänge s stetig differenzierbar annahm (Nr. 9b, erster Absatz). Dann ist in beiden Fällen J_0 dreimal stetig differenzierbar nach (x, y), so wie ich es zur Herleitung der notwendigen Eigenschaften von P benötige.

d. Ich gebe noch *ein P so* an, *daß ΔP weniger singulär* wird, d. h. weniger stark unendlich für $R \to 0$. Damit wird die Singularität des Kerns der dem Randwertproblem (15. 1) für $b = b_0$ zugeordneten Integralgleichung gemildert. Hierzu ergänze man J_0 im Randstreifensystem von b_0 durch passende Summanden, die n^2, n^3, ... als Faktoren enthalten. Unter Beschränkung auf (15. 1) setze ich $J = J_a = n + M \cdot n^2$ im Randstreifensystem von b_0 in (16. 1) an und bestimme $M = M(t)$ so, daß ΔH beschränkt wird. Ich entwickle

$$\begin{aligned}(R^2 + 4\,J_a\,J_a')^2 \cdot \Delta \log (R^2 + 4\,J_a\,J_a') &= 4\,J_a' \cdot (R^2 + 4\,J_a\,J_a') \cdot \Delta J_a - \\ &- 16\,J_a' \cdot (J_a' - J_a - (x' - x) \cdot J_{ax} - (y' - y) \cdot J_{ay}) - \\ &- 16\,J_a'^2 \cdot (J_{ax}^2 + J_{ay}^2 - 1)\end{aligned}$$

im Randstreifensystem nach steigenden Potenzen von n und $(x' - x)$ und $(y' - y)$. Man berücksichtige folgende Hilfsformeln (vgl. Nr. 9b):

$$\begin{aligned}&n_x = -\,Y_s, \quad n_y = +\,X_s, \quad n_x^2 + n_y^2 = 1,\\ &X_s\,X_{ss} + Y_s\,Y_{ss} = 0,\\ &k = X_s\,Y_{ss} - Y_s\,X_{ss} = \text{Krümmung von } d_0 \text{ in } (X, Y),\\ &n_{xx} = -\,X_s\,Y_{ss} : (1 - n \cdot k),\\ &n_{yy} = +\,Y_s\,X_{ss} : (1 - n \cdot k),\\ &n_{xy} = +\,X_s\,X_{ss} : (1 - n \cdot k) = -\,Y_s\,Y_{ss} : (1 - n \cdot k),\\ &\Delta n = -\,k : (1 - n \cdot k),\\ &+\,X_s\,Y_{ss} + Y_s^2 \cdot k = k, \quad -\,Y_s\,X_{ss} + X_s^2 \cdot k = k,\\ &X_s\,X_{ss} + X_s\,Y_s \cdot k = -\,Y_s\,Y_{ss} + X_s\,Y_s \cdot k = 0.\end{aligned}$$

Dann erhalte ich

$$\begin{aligned}&(R^2 + 4\,J_a\,J_a')^2 \cdot \Delta \log (R^2 + 4\,J_a\,J_a')\\ &= -\,4\,J_a' \cdot (2\,M + k) \cdot (4\,n^2 + 4\,n \cdot (x' - x) \cdot n_x + 4\,n \cdot (y' - y) \cdot n_y -\\ &\quad - R^2 + 2\,(x' - x)^2 \cdot Y_s^2 - 4\,(x' - x)\,(y' - y) \cdot X_s \cdot Y_s + 2\,(y' - y)^2 \cdot X_s^2) +\\ &\quad + J_a' \cdot (\text{Glieder von mindestens dritter Ordnung in } n, (x' - x) \text{ und } (y' - y)).\end{aligned}$$

Folglich ist

$$4\pi \cdot \Delta H = \Delta \log (R^2 + 4 J_a J'_a) \lesssim 1$$

für $2M + k = 0$. Demnach setze ich

$$(16.6) \qquad 4\pi \cdot P = 4\pi \cdot P_a \equiv -\log R^2 + \log (R^2 + 4 J_a J'_a)$$
$$\text{mit } J_a = n - \tfrac{1}{2} n^2 \cdot (X_s Y_{ss} - Y_s X_{ss})$$

im Randstreifensystem von b_0 für $E = \Delta$; im übrigen sei J_a von der Art wie J. Hierbei sollen die den Rand d_0 von b_0 darstellenden $X(s)$ und $Y(s)$ über die bisherige Annahme (anfangs Nr. 9b) hinausgehend in jedem Bereich $s_{\nu-1} \leqq s \leqq s_\nu$ *fünf*mal stetig differenzierbar sein, um die weitere P-Methode durchführen zu können. Dann ist J_a dreimal stetig differenzierbar. Es ist $\Delta P_a \lesssim 1$ und $\Delta P_a + C_0 \cdot P_a \lesssim 1 + |\log (R + J)|$, also $(\Delta P_a + C_0 \cdot P_a)$ nur unwesentlich singulärer als ΔP_a. Ähnlich wird auch die Singularität der Ableitungen von ΔP_a gemildert. Dagegen wird $\Delta P_a + T P_a \lesssim 1 : R$, also $(\Delta P_a + T P_a)$ gegenüber $(\Delta P_0 + T P_0)$ nicht gemildert. Die weitere P-Methode wird mit $J = J_0$ durchgeführt, wenn auch die Eigenschaften der Lösungen der zugehörigen Integralgleichung bei Verwendung von J_a wesentlich einfacher festzustellen sind. Jedoch ist J_0 wesentlich allgemeiner als J_a verwertbar.

Ist insbesondere b_0 eine Kreisfläche, so geht P_a in die (in Nr. 11a eingeführte) Greensche Funktion G für Δ über, wie ich jetzt zeige. Ich verlege den Mittelpunkt der Kreisfläche in den Ursprung des Koordinatensystems und wähle die Einheit auf den Koordinatenachsen so, daß die Krümmung $k = 1$ ist. Schließt man vorerst den Mittelpunkt durch eine Kreisfläche f mit dem Halbmesser h für $0 < h < 1$ aus und beschränkt t und t' auf $(b - f)$, so gewinnt man

$$4\pi \cdot P_a = -\log R^2 + \log (R^2 + (2n - n^2) \cdot (2n' - n'^2))$$

mit $n = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Also ist

$$4\pi \cdot P_a = -\log R^2 + \log (1 - 2(xx' + yy') + (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2))$$
$$= 4\pi \cdot P''_a.$$

In letzterer Form läßt sich P_a für t und t' im ganzen b bestimmen. Eine weitere identische Umformung ergibt

$$4\pi \cdot P_a = \log \left[\frac{\left(x - \frac{x'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)^2}{(x - x')^2 + (y - y')^2} (x'^2 + y'^2) \right],$$

worin $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ der zu (x, y) inverse Punkt ist. Somit gilt $\Delta P_a = 0$ für $R > 0$. Demnach ist P_a die bekannte Greensche Funktion G für das Randwertproblem (15. 1) mit dem Einheitskreis als b (vgl. z. B. Courant, Bd. I, S. 296—297).

Man bildet obiges G mittels Spiegelung durch reziproke Radien. Darum kann man das allgemeine Verfahren zur Bildung von P mittels J_a als Spiegelung an den Krümmungskreisen von d auffassen, ähnlich wie das Verfahren mittels J_0 als Spiegelung an den Tangenten von d zu deuten ist. (Vgl. ferner die diesbezüglichen grundsätzlichen Erwägungen in Abschnitt V.)

17. P für Bereiche mit Ecken $\pi : g$.

a. Zur Bildung von *Paramatrizes P für* die in Nr. 9 eingeführten (nicht notwendig geradlinig begrenzten) *Bereiche* $b = b(\pi : g, \ldots, g)$ *mit untereinander gleichen Ecken* $e = \pi : g$, die nicht auf einen der möglichen Doppelpunkte des Randes d fallen, die also nicht an Selbstberührungen von außen beteiligt sind, ersetze ich in dem in (14. 15) angegebenen P für den Winkelraum $e = \pi : g$ zweier Geraden n_u durch J_0 und n_v durch J_{00}; g eine natürliche Zahl größer als Eins. Dabei sind J_0 und J_{00} wie J_0 der Nr. 16c für die in Nr. 9c I eingeführten eckenfreien Hilfsbereiche b_0 und b_{00} zu bestimmen (Fig. 13). Die Beschränkung auf den Fall $E = \Delta + T$ behalte ich zum Unterschied von Nr. 16 für alle eckigen b bei. Somit entsteht aus (14. 15) eine Funktion, die ich mit $P(\pi : g, \ldots, g)$ bezeichne. Dann setze ich

$$P = P(\pi : g, \ldots, g). \tag{17. 1}$$

Daneben benutze ich entsprechend (14. 16′) die identischen Umformungen

$$P = P(J_0, J_{00}; J_0', J_{00}'') \quad \text{und}$$
$$P = P(J_{00}, J_0; J_{00}', J_0').$$

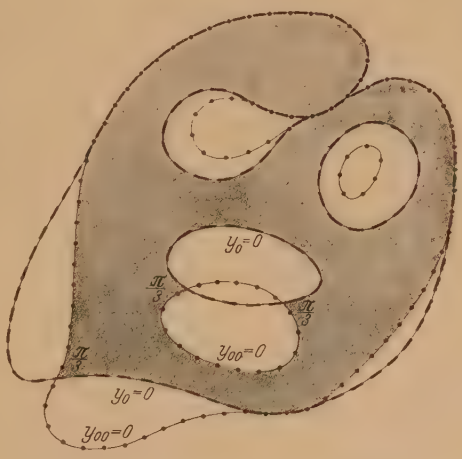

Fig. 13. Überlagerung des schraffierten Ausgangsbereiches $b = b(\pi : 3, 3, 3)$ durch die beiden Hilfsbereiche b_0 mit dem gestrichelten Rand d_0 und b_{00} mit dem punktierten Rand d_{00}.

Wiederum lassen sich für jeden einzelnen Logarithmus die vier Fälle (14. 16) und für jedes mit $J_0 = 0$ verschwindende Paar von Logarithmen die vier Fälle (14. 17) nebst (14. 18) unterscheiden. Die Eigenschaften von $P(\pi : g, \ldots, g)$ werden in Nr. 19 und 22a zusammengestellt.

b. Als Beispiele für $P(\pi : g, \ldots, g)$ gebe ich *P für ein Rechteck und P für ein gleichseitiges Dreieck* im Fall $E = \Delta + T$ an und zwar somit in einer zweiten neben der in Nr. 15c gebildeten Form:

$$(17.2)\quad \begin{aligned} 4\pi \cdot P &= 4\pi \cdot P(\pi : 2, 2, 2, 2) \\ &= -\log R^2 + \log (R^2 + 4 J_0 J_0') + \log (R^2 + 4 J_{00} J_{00}') \\ &\quad - \log (R^2 + 4 J_0 J_0' + 4 J_{00} J_{00}') \end{aligned}$$

für ein Rechteck r

und

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot P &= 4\pi \cdot P(\pi : 3, 3, 3) \\ &= -\log R^2 + \log (R^2 + 4 J_0 J_0') + \log (R^2 + 4 J_{00} J_{00}') - \\ &\quad - \log (R^2 + 4 J_0 J_0' + 4 J_{00} J_{00}' + 4 J_0 J_{00}') - \\ &\quad - \log (R^2 + 4 J_0 J_0' + 4 J_{00} J_{00}' + 4 J_{00} J_0') + \\ &\quad + \log (R^2 + 4 J_0 J_0' + 4 J_{00} J_{00}' + 4 J_0 J_{00}' + 4 J_{00} J_0') \end{aligned}$$

für ein gleichseitiges Dreieck.

Obiges $P(\pi : 2, 2, 2, 2)$ spezialisiere ich derart, daß P wieder die in Nr. 15b angegebenen günstigen Eigenschaften hat. Dazu (Fig. 14) verlängere ich die vier das Rechteck r begrenzenden Strecken in jeder Richtung um das jeweils gleiche Stück und lege durch die Endpunkte dieser Stücke das dem ursprünglichen Rechteck r parallele und r umfassende Rechteck, das ich mit q bezeichne. Dann wähle ich die Ränder d_0 und d_{00} der Hilfsbereiche b_0 und b_{00} so, daß die (im Sinne der Nr. 9c I) zugehörigen Randstreifen innerhalb q mit denen zu je zwei gegenüberliegenden Geraden von r identisch zusammenfallen; die restlichen Randstreifenstücke längs d_0 und d_{00} sollen sich außerhalb von q befinden. Dann sind die d_0 und d_{00} darstellenden $X(s)$ und $Y(s)$, solange diese zu q gehören, beliebig oft differenzierbar und somit J_0 bzw. J_{00} im ganzen b_0 bzw. b_{00} c-fach stetig differenzierbar anzugeben. Hierbei bedeutet c (wie in Nr. 15b) eine beliebige ganze Zahl, die größer als zwei ist. Da die für das singuläre Randverhalten von $P(\pi : 2, 2, 2, 2)$ kritischen Randstreifenstücke in q liegen und daselbst die Funktion $P(\pi : 2, 2, 2, 2)$ im wesentlichen (in Eckennähe genau) in den kritischen Summanden $P(n_\nu, n_{\nu+1}; n_\nu', n_{\nu+1}')$ von S_0 der

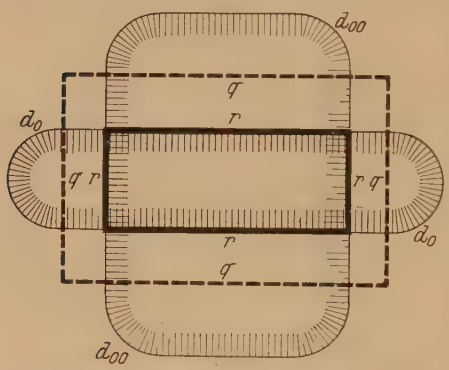

Fig. 14. Ursprüngliches Rechteck r im Hilfsrechteck q eingebettet.

Nr. 15a übergeht, haben beide Formen von $P(\pi : 2, 2, 2, 2)$ die gleichen, in Nr. 15b angegebenen Eigenschaften.

Dagegen verläuft für $P(\pi : 3, 3, 3)$ der Randstreifen von b_0 und ebenso der von b_{00} an irgendeiner Stelle im Dreieck gekrümmt (Fig. 15). Man kann daher obiges Verfahren für $P(\pi : 2, 2, 2, 2)$ nicht für $P(\pi : 3, 3, 3)$ übertragen und nicht mehr die günstigen P-Eigenschaften der Nr. 15b nachweisen.

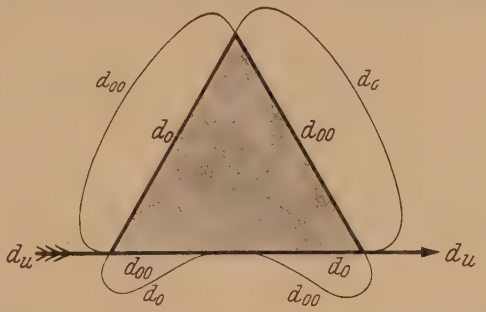

Fig. 15. Im gleichseitigen Dreieck $b(\pi : 3, 3, 3)$ verlaufen die Randstreifensysteme des Bereiches b_0 mit dem Rand d_0 und die des Bereiches b_{00} mit dem Rand d_{00} längs einem Stück der Geraden d_u gekrümmt.

c. *P für* die in Nr. 9 eingeführten *Bereiche* $b = b(\pi : g_1, g_2, \ldots, g_p)$ *mit untereinander verschiedenen Ecken* $e = \pi : g$ oder mit Ecken, die sich an einem mehrfachen Randpunkt beteiligen, setze ich folgendermaßen aus den nach Nr. 17a zu bildenden $P(\pi : g_u, \ldots, g_u)$ für die in Nr. 9 eingeführten Teilbereiche $b_u = b(\pi : g_u, \ldots, g_u)$ zusammen (Fig. 16). Besteht möglicherweise b_u aus getrennt liegenden Teilen, so ist, wenn t und t' sich im gleichen Teil befinden, für diesen $P(\pi : g_u, \ldots, g_u)$ nach Nr. 17a zu bilden; befinden sich jedoch t und t' in verschiedenen Teilen, so ist $P(\pi : g_u, \ldots, g_u) \equiv 0$ zu setzen. Dabei läuft u von 2 bis q und es kommt noch P_0 für $b_1 = b_0$ oder $P(\pi : g_1, \ldots, g_1)$ für $b_1 = b(\pi : g_1, \ldots, g_1)$ hinzu.

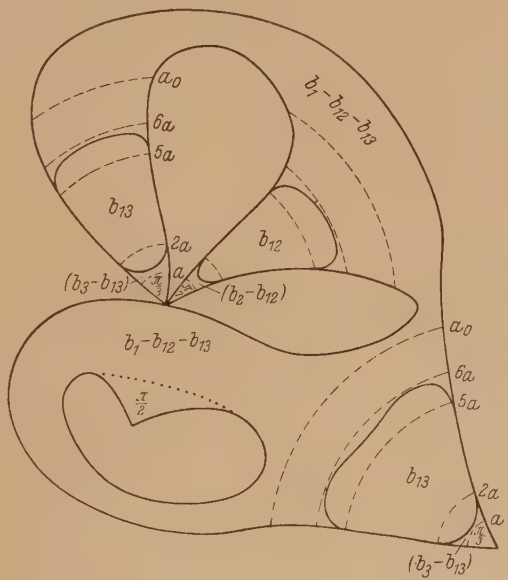

Fig. 16. Überdeckung von $b = b(\pi : 2, 3, 3, 7)$ durch die Teilbereiche $b_1 = b_1(\pi : 2)$, $b_2 = b_2(\pi : 7)$ und $b_3 = b_3(\pi : 3, 3)$. Dabei besteht b_3 erlaubterweise aus zwei getrennten Teilen. b_{12} bzw. b_{13} ist der gemeinsame Teil von b_1 mit b_2 bzw. b_3. (Rundet man die Ecke $\pi : 2$ der Innenrandlinie durch die punktierte Linie ab, so wird $b_1 = b_0$.)

$B_{0u} = B_{0u}(t)$ seien für $u = 2, \ldots, q$ Funktionen, welche vor allem die (in Nr. 10a III angegebenen) Eigenschaften von C_u haben (Fig. 17). Darüber hinaus sei jedes B_{0u} eine positive, in b dreimal stetig differenzierbare Funktion. Weiter sei $B_{0u} = n^4_{1u}$ in einem Randstreifen längs d_{1u} außerhalb der zu b_u gehörenden $K(s_{ew}, 4a)$ [10]), ferner $B_{0u} = 1 - n^4_{1u}$ in einem Randstreifen längs d_{1u} innerhalb der zu b_u gehörenden $K(s_{ew}, 3a)$; $u > 1$. Dann bestimme ich $B_u = B_u(t)$ für $u = 1, \ldots, q$ durch $B_u \geqq 0$ und

$$B_u^2 = \frac{B_{0u}^2}{(1-B_{0u})^2 + B_{0u}^2} \quad \text{für } u = 2, \ldots, q,$$

ferner

$$B_1^2 = \text{Produkt aller } \frac{(1-B_{0v})^2}{(1-B_{0v})^2 + B_{0v}^2} \quad \text{für } v = 2, \ldots, q.$$

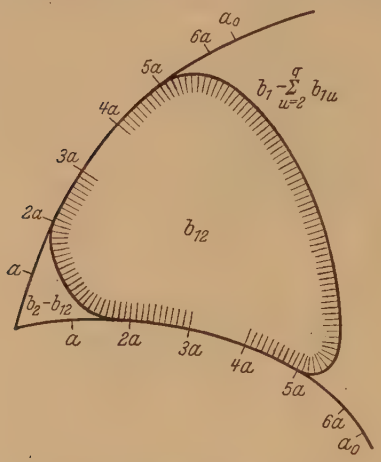

Fig. 17. Die Definitionsbereiche für die Funktionen C_2, B_{02} und B_2, ferner für B_1 in Eckennähe. — Zu b_{12} gehören auch die beiden schraffierten Randstreifen.

Jedes B_u ist dreimal stetig differenzierbar in b und alle ersten bis dritten Ableitungen von B_u lassen sich in der Form $\leqq C_u$ für $u = 1, \ldots, q$ abschätzen. Ich bestimme

$$(17.3) \quad P = P(\pi : g_1, g_2, \ldots, g_p) = \Sigma_u B_u B'_u \cdot P(\pi : g_u, \ldots, g_u) \quad \text{für } u = 1, \ldots, q;$$

hierin ist $P(\pi : g_1, \ldots, g_1)$ durch P_0 zu ersetzen, wenn $b_1 = b_0$ sein sollte; das sei P für $b(\pi : g_1, g_2, \ldots, g_p)$ im Fall $E = \Delta + T$.

In (17.3) ist der Faktor von $-\frac{1}{4\pi} \log R^2$ für $R = 0$ gleich $\Sigma_u B_u^2 = 1$ für $u = 1, \ldots, q$. Denn entweder liegt t in einem und nur einem b_u für $u > 1$ und folglich

$$B_1^2 = (1 - B_{0u})^2 : ((1 - B_{0u})^2 + B_{0u}^2),$$

$$B_u^2 = B_{0u}^2 : ((1 - B_{0u})^2 + B_{0u}^2),$$

$$B_v^2 = 0 \quad \text{für} \quad v \neq u \text{ und } v > 1.$$

Oder t liegt in b_1 außerhalb aller b_u für $u > 1$ und folglich $B_1^2 = 1$ und $B_u^2 = 0$ für $u > 1$. Die näheren Eigenschaften von $P(\pi : g_1, g_2, \ldots, g_p)$ werden in Nr. 19 und 22b zusammengestellt.

[10]) Die $K(s_{ew}, va)$ für $v = 1, \ldots, 6$ sind die zu b gehörenden Kreisausschnitte mit der Ecke s_{ew} als Mittelpunkt und den Halbmessern va.

Mit (17. 3) ist die allgemeinste meiner Parametrizes aufgestellt. Damit sind die im vorstehenden Abschnitt II geführten Untersuchungen über Wesen und Bildung der Parametrix P für Randwertprobleme zweiter Ordnung im Zweidimensionalen, nämlich für die in Nr. 12b wiederholten (10. 7, 8) beendet.

III. Eigenschaften der Parametrix P für Probleme zweiter Ordnung im Zweidimensionalen.

Die in Nr. 10c angekündigte Auflösungstheorie für die Randwertprobleme (10. 7, 8) (vgl. Nr. 12b) wird mittels den in (15. 2), (16. 5, 6), (17. 1, 2, 3) eingeführten sechs Parametrizes P im Abschnitt IV durchgeführt. Hierzu stelle ich im vorliegenden Abschnitt III die genauen Eigenschaften dieser P fest.

18. Abschätzungen betreffs der Grundbestandteile von P.

Die Eigenschaften der Parametrizes P fußen auf denen der in P vorkommenden einzelnen Logarithmen (Nr. 18a) und auf denen der am Rand sich ausgleichenden Paare solcher Logarithmen (Nr. 18b). Damit werden diesbezügliche bisherige Feststellungen (Nr. 16b) erweitert und ferner ergänzt (Nr. 18c). Das geschieht etwas allgemeiner, als es zur Feststellung der Eigenschaften von P nötig ist, um daran auch im Abschnitt V anknüpfen zu können.

a. Ich setze

$$N = f J_0 J'_0 + h J_{00} J'_{00} + i J_0 J'_{00} + j J_{00} J'_0$$

für alle nach (14. 16) möglichen Werte von f, h, i, j. Es ist vorerst nicht nötig, diese Werte gleich den in P eingehenden Koeffizienten zu setzen, welche durch die in (14. 1, 2) eingeführten f_a und h_a bestimmt sind. Dann gelten folgende *Abschätzungen betreffs* $\log (Q^2 + 4N)$.

I. Auf Grund von Nr. 16b I ist, da für $f = 0$ und ebenso für $h = 0$ nur die Möglichkeit $i = j = 0$ besteht:

$$R^2, f J_0^2, f J_0'^2, i J_0^2, i J_0'^2, h J_{00}^2, h J_{00}'^2, j J_{00}^2, j J_{00}'^2 \lesssim R^2 + f J_0 J'_0 + h J_{00} J'_{00}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8N &\cong Q^2 + 4N \cong Q^{2\prime\prime} + 4N \cong R^2 + 4N \\ &\sim R^2 + f J_0 J'_0 + h J_{00} J'_{00} \sim R^2 + f J_0^2 + h J_{00}^2 \\ &\cong R^2 + f J_0'^2 + h J_{00}'^2 \cong (R + f J_0 + h J_{00})^2 \cong (R + f J'_0 + h J'_{00})^2. \end{aligned}$$

II. Es sind $\log (Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8N)$, $\log (Q^2 + 4N)$, $\log (Q^{2\prime\prime} + 4N)$ und $\log (R^2 + 4N)$ m-mal stetig differenzierbar nach (x, y, x', y') für $R + f J_0 +$

$+ hJ_{00} > 0$. Diese Logarithmen sind $\cong \log (R + fJ_0 + hJ_{00})$ [11]). Ihre m-ten Ableitungen nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : (R + fJ_0 + hJ_{00})^m \lesssim 1 : R^m$. Dabei ist m wie in Nr. 16 b II zu wählen.

III. Ich führe eine Konstante w ein durch

$$w = A \cdot J_{0x} J_{00x} + B \cdot J_{0x} J_{00y} + B \cdot J_{0y} J_{00x} + C \cdot J_{0y} J_{00y} \quad \text{für} \quad J_0 = J_{00} = 0, \tag{18. 1}$$

also $w = -\cos e$ im Normalfall $E = \Delta + T$. Denn dann ist $w = \cos (n_0, n_{00})$ für $n_0 = n_{00} = 0$.

Folgende *Abschätzungen* gelten dann und nur dann, wenn f, h, i, j außer (14. 16) noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad f^2 + i^2 - f + 2wfi = 0, \\ &\text{(II)} \quad h^2 + j^2 - h + 2whj = 0, \\ &\text{(III)} \quad 2fj + 2hi - i - j + 2wfh + 2wij = 0 \end{aligned} \tag{18. 2}$$

erfüllen. Es ist, wenn man

$$D'S = A \cdot S_{x'x'} + 2B \cdot S_{x'y'} + C \cdot S_{y'y'}$$

definiert,

$$\begin{aligned} D' \log (Q^2 + 4N) &\lesseqgtr (fJ_0 + hJ_{00}) : (R + fJ_0 + hJ_{00})^2 \\ &\lesssim 1 : (R + fJ_0 + hJ_{00}) \lesssim 1 : R. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von $D' \log (Q^2 + 4N)$ nach x' oder y' ist

$$\lesseqgtr (fJ_0 + hJ_{00}) : (R + fJ_0 + hJ_{00})^3.$$

Die möglichen Ableitungen von $D' \log (Q^2 + 4N)$ nach (x, y, x', y') sind in bezug auf x und y von höchstens dritter Ordnung, dagegen in bezug auf x' und y' von höchstens erster Ordnung. Die demnach zulässigen m-ten Ableitungen sind $\lesssim 1 : (R + fJ_0 + hJ_{00})^{m+1}$.

Zum *Beweis* gehe ich aus von

$$\begin{aligned} D' \log (Q^2 + 4N) = &\frac{4D'N}{Q^2 + 4N} - \\ &- 16 \frac{N(t,t) - N(t,t') - (x - x') \cdot N_{x'} - (y - y') \cdot N_{y'}}{(Q^2 + 4N)^2} - \\ &- 16 \frac{(A - A') \cdot N_{x'}^2 + 2(B - B') \cdot N_{x'} N_{y'} + (C - C') \cdot N_{y'}^2}{(Q^2 + 4N)^2} - \\ &- 16 \frac{A' \cdot N_{x'}^2 + 2B' \cdot N_{x'} N_{y'} + C' \cdot N_{y'}^2 - N(t,t)}{(Q^2 + 4N)^2}. \end{aligned} \tag{18. 3}$$

[11]) Vgl. Fußnote zum ersten Satz der Nr. 16 b II.

Alle für $D' \log(Q^2 + 4N)$ behaupteten Abschätzungen gelten für den ersten, zweiten und dritten Bruch, und zwar für alle f, h, i, j, die (14.16) erfüllen, ohne dabei die Einschränkungen (18.2) zu fordern. Im letzten Bruch ist

$$\begin{aligned} & A' \cdot N_{x'}^2 + 2B' \cdot N_{x'} N_{y'} + C' \cdot N_{y'}^2 - N(t,t) \\ & = ((fJ_0 + jJ_{00})^2 \cdot (A' \cdot J_{0x'}'^2 + 2B' \cdot J_{0x'}' J_{0y'}' + C' \cdot J_{0y'}'^2 - 1)) + \\ & + ((iJ_0 + hJ_{00})^2 \cdot (A' \cdot J_{00x'}'^2 + 2B' \cdot J_{00x'}' J_{00y'}' + C' \cdot J_{00y'}' - 1)) + \\ & + (2(fJ_0 + jJ_{00}) \cdot (iJ_0 + hJ_{00}) \cdot (A' \cdot J_{0x'}' J_{00x'}' + B' \cdot J_{0x'}' J_{00y'}' + \\ & \qquad + B' \cdot J_{0y'}' J_{00x'}' + C' \cdot J_{0y'}' J_{00y'}')) + \\ & + (-(fJ_0 + jJ_{00}) \cdot J_0 - (iJ_0 + hJ_{00}) \cdot J_{00} + (fJ_0 + jJ_{00})^2 + \\ & \qquad + (iJ_0 + hJ_{00})^2). \end{aligned}$$

Der erste und ebenso der zweite Summand (. . .) führt nach (16.4) wieder auf die behaupteten Abschätzungen für alle nach (14.16) zulässigen f, h, i, j. Das gilt auch für den dritten Summanden (. . .), wenn man daselbst

$$(A' \cdot J_{0x'}' J_{00x'}' + \cdots + C' \cdot J_{0y'}' J_{00y'}')$$

durch

$$(A' \cdot J_{0x'}' J_{00x'}' + \cdots + C' \cdot J_{0y'}' J_{00y'}' - w)$$

ersetzt. Somit bleibt noch der Bruch

$$\begin{aligned} (18.4) \quad & -\frac{16}{(Q^2+4\cdot N)^2} (2(fJ_0 + jJ_{00}) \cdot (iJ_0 + hJ_{00})\, w - \\ & - (fJ_0 + jJ_{00}) \cdot J_0 + (iJ_0 + hJ_{00}) \cdot J_{00} + (fJ_0 + jJ_{00})^2 + \\ & + (iJ_0 + hJ_{00})^2) \end{aligned}$$

abzuschätzen. Dieser ist gleich

$$\begin{aligned} (18.5) \quad & -\frac{16}{(Q^2+4\cdot N)^2} (J_0^2 \cdot (f^2 + i^2 - f + 2wfi) + \\ & + J_{00}^2 \cdot (h^2 + j^2 - h + 2whj) + J_0 J_{00} \cdot (2fj + 2hi - i - j + \\ & + 2wfh + 2wij)). \end{aligned}$$

Folglich ist er identisch Null, wenn $f = h = i = j = 0$ oder $f = 1$ und $h = i = j = 0$ oder schließlich $h = 1$ und $f = i = j = 0$ gilt. Er geht für f und $h \geqq 1$ nebst i und $j \geqq 0$ im Fall $R = J_{00} = 0$ in $-(f^2 + i^2 - f + 2wfi) : f^2 J_0^2$ über, was (wie ich behauptete) nur dann $\lesssim 1 : fJ_0$ ist, wenn die Bedingung (I) von (18.2) erfüllt ist. Entsprechend führt $R = J_0 = 0$ auf die Notwendigkeit der Bedingung (II). Dann bleibt von (18.5) im Fall $R = 0$ und $J_0 = J_{00}$ noch

$$-(2fj + 2hi - i - j + 2wfh + 2wij) : (f + h + i + j)^2 J_0^2$$

übrig, was nur dann $\lesssim 1 : (f + h)J_0$ ist, wenn die Bedingung (III) von (18.2) befriedigt ist. Umgekehrt verschwindet (18.5) identisch in t und t', wenn (18.2) erfüllt ist. Hierauf fußen die behaupteten Abschätzungen.

IV. Für den Koeffizientenquadrupel (f, h, i, j) in N bestehen nach (14. 15) nur die vier Möglichkeiten

$$(18.\,6)\qquad \begin{gathered}(f_a, f_a, h_{a-1}, h_a),\quad (f_a, f_a, h_a, h_{a-1}),\\ (f_{a+1}, f_a, h_a, h_a),\quad (f_a, f_{a+1}, h_a, h_a)\\ \text{für } a = 0, 1, \ldots, c.\end{gathered}$$

Dabei sind die f_a und h_a gemäß (14. 1, 2) bestimmte Funktionen von e. Es gilt der *Hilfssatz*:

Jeder der vorstehenden Koeffizientenquadrupel löst das System der drei Gleichungen (18. 2) für (f, h, i, j), wenn $w = -\cos e$ und e irgendeine Zahl ist, die (13. 4) genügt. Hierbei braucht e nicht auf $\pi : g$ wie in Nr. 14c beschränkt zu werden.

Denn dann geht jede der Gleichungen (18. 2) wegen (14. 5, 7, 8) in

$$h_a^2 + f_a^2 - f_a - 2\cos e \cdot h_a f_a = f_a(f_{a+1} + f_a - 1 - 2\cos e \cdot h_a) = 0,$$

also in $0 = 0$ über. Nun trifft $w = -\cos e$ für den Normalfall $E = \Delta + T$ ein. Demnach besteht das

Ergebnis: Für $\Delta' \log (R^2 + 4N)$ gelten die für $D' \log (Q^2 + 4N)$ anschließend (18. 2) angegebenen Abschätzungen, wenn (f, h, i, j) irgendeiner der in P vorkommenden Koeffizientenquadrupel ist; ferner ist dann unter Hinzunahme von II

$$\Delta' \log (R^2 + 4N) + T' \log (R^2 + 4N) \lesssim 1 : (R + fJ_0 + hJ_{00}) \lesssim 1 : R$$

und die m-ten Ableitungen davon nach (x, y, x', y') sind

$$\lesssim 1 : (R + fJ_0 + hJ_{00})^{m+1} \lesssim 1 : R^{m+1}.$$

Dabei ist m wie in III zu wählen.

b. Ich setze

$$L = pJ_0J_0' + pJ_{00}J_{00}' + qJ_0J_{00}' + rJ_{00}J_0'$$

und

$$M = kJ_0J_0' + pJ_{00}J_{00}' + rJ_0J_{00}' + rJ_{00}J_0'$$

für alle nach (14. 17) möglichen Werte von k, p, q, r. Es ist vorerst nicht nötig, diese Werte gleich den in P eingehenden Koeffizienten zu setzen, welche durch die in (14. 1, 2) eingeführten f_a und h_a bestimmt sind. Dann gelten folgende *Abschätzungen betreffs* $-\log (Q^2 + 4L) + \log (Q^2 + 4M)$.

V. In $-\log (Q^2 + 4L) + \log (Q^2 + 4M)$

$$= +\log\left(1 + 4J_0 \cdot \frac{(k-p)J_0' + (r-q)J_{00}'}{Q^2 + 4L}\right)$$

$$= -\log\left(1 + 4J_0 \cdot \frac{(p-k)J_0' + (q-r)J_{00}'}{Q^2 + 4M}\right)$$

ist nach (14. 19) entweder

$$(k-p)\,J_0' + (r-q)\,J_{00}' \geqq 0$$

oder

$$(p-k)\,J_0' + (q-r)\,J_{00}' \geqq 0$$

für t' in b.

Im Fall $k = 1$ und $p = q = r = 0$ ist

$$-\log(Q^2+4L) + \log(Q^2+4M)$$

$$= \log\left(1 + \frac{4J_0J_0'}{Q^2}\right) \simeq \log\left(1+\frac{4J_0J_0'}{R^2}\right) \simeq \log\frac{(R+J_0)^2}{R^2} = 2\log\left(1+\frac{J_0}{R}\right).$$

Im Fall $p = 1$ und $k = r = 0$ nebst $q \geqq 0$ ist

$$-\log(Q^2+4L) + \log(Q^2+4M)$$

$$= -\log\left(1+4J_0\cdot\frac{J_0'+qJ_{00}'}{Q^2+4J_{00}J_{00}'}\right) \lessapprox \log\left(1+J_0\cdot\frac{2R+J_0+2J_{00}}{(R+J_{00})^2}\right)$$

$$= 2\log\left(1+\frac{J_0}{R+J_{00}}\right).$$

In den übrigen Fällen von (14. 17) ist

$$-\log(Q^2+4L) + \log(Q^2+4M)$$

$$\lessapprox \log\left(1+J_0\cdot\frac{J_0'+J_{00}'}{(R+J_0+J_{00})^2}\right) \lessapprox \log\left(1+\frac{J_0}{R+J_0+J_{00}}\right).$$

VI. Ich behaupte folgende *Abschätzungen*: Die n-ten Ableitungen von $-\log(Q^2+4L)+\log(Q^2+4M)$ nach (x', y') sind $\lessapprox J_0 : (R+J_0)\cdot R^n$ im Fall $k=1$ und $p=q=r=0$; sie sind $\lessapprox J_0 : (R+J_0+J_{00})\cdot(R+J_{00})^n$ im Fall $p=1$ und $k=r=0$ nebst $q\geqq 0$; sie sind $\lessapprox J_0 : (R+J_0+J_{00})^{n+1}$ in den übrigen Fällen von (14. 17); dabei ist $n = 1, 2, 3$. Die m-ten Ableitungen von $-\log(Q^2+4L)+\log(Q^2+4M)$ nach (x, y, x', y') sind $\lessapprox 1 : R^m$ im Fall $k=1$ und $p=q=r=0$; sie sind $\lessapprox 1 : (R+J_{00})^m$ im Fall $p=1$ und $k=r=0$ nebst $q\geqq 0$; sie sind $\lessapprox 1 : (R+J_0+J_{00})^m$ in den übrigen Fällen von (14. 17); hiermit sind sie $\lessapprox 1 : R^m$ in allen Fällen; dabei ist m wie in Nr. 16b II zu wählen.

Zum *Beweis* setze man $z = x$ oder $z = y$. Dann ist

$$(-\log(Q^2+4L)+\log(Q^2+4M))_{z'}$$

$$= 4J_0\cdot\frac{(Q^2+4M)\cdot\left((k-p)\,J_0'+(r-q)\,J_{00}'\right)_{z'} - (Q^2+4M)_{z'}\cdot(\dots)}{(Q^2+4L)\cdot(Q^2+4M)}.$$

Das ist gleich $4J_0\cdot\frac{Q^2\cdot J_{0z'}' - Q_{z'}^2\cdot J_0'}{Q^2\cdot(Q^2+4J_0J_0')}$ im Fall $k=1$ und $p=q=r=0$, ferner gleich

$$-4J_0\cdot\frac{Q^2\,(J_0'+qJ_{00}')_{z'} - Q_{z'}^2\,(J_0'+qJ_{00}') + 4J_{00}\,(J_{00}'J_{0z'}' - J_{00z'}'J_0')}{(Q^2+4J_0J_0'+4J_{00}J_{00}'+4qJ_0J_{00}')\cdot(Q^2+4J_{00}J_{00}')}$$

im Fall $p=1$ und $k=r=0$ nebst $q\geqq 0$, woraus vorstehende Abschätzungen folgen.

VII. Ferner besteht die *Abschätzung*

$$D'\left(-\log\left(Q^2+4L\right)+\log\left(Q^2+4M\right)\right) \lesssim 1:R$$

und die m-ten Ableitungen davon nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1:R^{m+1}$; dabei ist m wie in III zu wählen; das gilt dann und nur dann, wenn (k, p, q, r) außer (14. 17) noch die Bedingungen (18. 2) für $\log(Q^2+4L)$ und die für $\log(Q^2+4M)$ erfüllen. Diese Bedingungen sind, wenn w wie in (18. 1) bestimmt ist,

(18. 7)
$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && p^2+q^2-p+2wpq=0,\\
&\text{(II)} && p^2+r^2-p+2wpr=0,\\
&\text{(III)} && 2pr+2pq-q-r+2wp^2+2wqr=0,\\
&\text{(IV)} && k^2+r^2-k+2wkr=0,\\
&\text{(V)} && 2kr+2pr-2r+2wkp+2wr^2=0.
\end{aligned}$$

(18. 7) sind nach III hinreichende Bedingungen; ihre Notwendigkeit *beweise* ich folgendermaßen. Vorübergehend kürze man die linken Seiten von (18. 7, I . . . V) mit a, b, c, d, e ab. Dann ist nach (18. 5) derjenige Teil von $D'\left(-\log(Q^2+4L)+\log(Q^2+4M)\right)$, der nicht $\lesssim 1:R$ für alle nach (14. 17) erlaubten (k, p, q, r) ist, gleich der Differenz

$$+16\,\frac{aJ_0^2+bJ_{00}^2+cJ_0J_{00}}{(Q^2+4L)^2}-16\,\frac{dJ_0^2+bJ_{00}^2+eJ_0J_{00}}{(Q^2+4M)^2}.$$

Für $J_0'=J_{00}'=0$ wird diese Differenz gleich $16J_0\cdot((a-d)J_0+(c-e)J_{00}):Q^4$. Das widerspricht der geforderten Abschätzung, wenn nicht $(d-a)J_0+(e-c)J_{00}=0$, also $d=a$ und $e=c$ besteht. Hierfür wird die Differenz gleich

$$-128\,J_0\cdot(aJ_0^2+bJ_{00}^2+cJ_0J_{00})\cdot(Q^2+2L+2M)\cdot\frac{(p-k)J_0'+(q-r)J_{00}'}{(Q^2+4L)^2\cdot(Q^2+4M)^2}.$$

Sie widerspricht mit Rücksicht auf (14. 18) der geforderten Abschätzung, wenn nicht

$$aJ_0^2+bJ_{00}^2+cJ_0J_{00}=0,\quad\text{also } a=b=c=0$$

und damit auch $d=e=0$ ist.

Demnach sind (18. 7) auch notwendige Bedingungen für die anfangs VII angegebenen Abschätzungen.

VIII. Für $D'\left(-\log(Q^2+4L)+\log(Q^2+4M)\right)$ und die Ableitungen davon gebe ich bei erfüllten Bedingungen (18. 7) noch genauere Abschätzungen an, aus denen das Randverhalten hervorgeht. Hierzu ist $D'(\ldots)$ als Differenz zweier Ausdrücke (18. 3) darzustellen. Dabei fallen die nach VII kritischen Bestandteile wegen erfüllten (18. 7) weg. Die Differenzen entsprechender Einzelbrüche sind nach V und VI so zusammenzufassen, daß sie den gemeinsamen Faktor J_0 erhalten, und dann nach dem dort angedeuteten Verfahren abzuschätzen. Die Durchrechnung führt zu folgendem

Ergebnis im allgemeinen Fall:

Für $k = 1$ und $p = q = r = 0$ sind alle Bedingungen (18.7) erfüllt. Es ist $D'(\ldots) \lessapprox J_0 : (R + J_0)^2$. Die erste Ableitung davon nach x' oder y' ist $\lessapprox J_0 : (R + J_0)^3$. Die m-ten Ableitungen davon nach (x, y, x', y') sind $\lessapprox 1 : (R + J_0)^{m+1}$.

Für $p = 1$ und $k = r = 0$ nebst $q \geqq 0$ sind die Bedingungen (II, IV, V) befriedigt und geht (III) in $q + 2w = 0$ über, wodurch dann auch (I) befriedigt wird. Ist letztere Bedingung erfüllt, so ist $D'(\ldots) \lessapprox J_0 : (R + J_0 + J_{00}) \cdot (R + J_{00})$. Die erste Ableitung davon nach x' oder y' ist $\lessapprox J_0 : (R + J_0 + J_{00}) \cdot (R + J_{00})^2$. Die m-ten Ableitungen davon nach (x, y, x', y') sind $\lessapprox 1 : (R + J_{00})^{m+1}$.

In den übrigen Fällen von (14.17) besteht bei erfüllten Bedingungen (18.7) $D'(\ldots) \lessapprox J_0 : (R + J_0 + J_{00})^2$. Die erste Ableitung davon nach x' oder y' ist $\lessapprox J_0 : (R + J_0 + J_{00})^3$. Die m-ten Ableitungen davon nach (x, y, x', y') sind $\lessapprox 1 : (R + J_0 + J_{00})^{m+1}$.

Stets ist m wie in III zu wählen.

IX. *Beschränkt man* im Sonderfall $E = \Delta + T$ *den Koeffizientenquadrupel* (k, p, q, r) *auf die in* P *vorkommenden Möglichkeiten*, so folgt aus dem Hilfssatz von IV, daß die Bedingungen (18.7) mit $w = -\cos e$ erfüllt sind. Dann besteht das

Ergebnis im Fall $E = \Delta + T$:

Für $\Delta'(-\log(R^2 + 4L) + \log(R^2 + 4M))$ gelten die für $D'(\ldots)$ in VII und VIII angegebenen Abschätzungen. Weiter ist dann unter Hinzunahme von VI

$\Delta'(\ldots) + T'(\ldots) \lessapprox J_0 : (R + J_0) \cdot R$ im Fall $k = 1$ und $p = q = r = 0$;

$\Delta'(\ldots) + T'(\ldots) \lessapprox J_0 : (R + J_0 + J_{00}) \cdot (R + J_{00})$

im Fall $p = 1$ und $k = r = 0$ nebst $q \geqq 0$;

$\Delta'(\ldots) + T'(\ldots) \lessapprox J_0 : (R + J_0 + J_{00})^2$ in den übrigen Fällen von (14.17);

damit

$\Delta'(\ldots) + T'(\ldots) \lessapprox 1 : R$ in allen Fällen.

Die ersten Ableitungen von $\Delta'(\ldots) + T'(\ldots)$ nach x' oder y' und die m-ten Ableitungen davon nach (x, y, x', y') werden genau so abgeschätzt wie die entsprechenden $(m+1)$-ten Ableitungen von $(\ldots)$ in VI.

c. Es sind noch die *Abschätzungen* der Nr. 16b *für* $b = b_0$ *unter Beibehaltung des allgemeinen* E entsprechend Nr. 18a, b zu ergänzen. Jetzt treten e und J_{00} nicht auf. Es genügt, in den Abschätzungsergebnissen J anstatt J_0 zu schreiben, wobei J (allgemeiner als J_0) in Nr. 16a eingeführt wurde.

X. Aus Nr. 16b IV für $J = J_0$ und (16. 4) folgt

$$D'\left(-\log Q^2 + \log(Q^2 + 4 J_0 J_0')\right)$$
$$= D' \log(Q^2 + 4 J_0 J_0') \lessapprox J : (R + J)^2 < 1 : (R + J) \lesssim 1 : R.$$

Die erste Ableitung davon nach x' oder y' ist $\lessapprox J : (R + J)^3 \lesssim 1 : (R + J)^2 \lesssim 1 : R^2$. Die m-ten Ableitungen davon nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : (R + J)^{m+1} \lesssim 1 : R^{m+1}$; dabei ist m wie in III zu wählen. Dasselbe folgt aus III für $f = 1$ und $h = i = j = 0$ und ebenso aus VIII für $k = 1$ und $p = q = r = 0$, da dann (18. 2, 7) erfüllt sind.

XI. Aus X, ferner aus Nr. 16b II, III für $J = J_0$ und (16. 4) folgt unter Anwendung einer (16. 3) entsprechenden Identität, daß

$$E' \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8 J_0 J_0'), \quad E' \log(Q^2 + 4 J_0 J_0')$$
$$\text{und} \quad E' \log(Q^{2\prime\prime} + 4 J_0 J_0') \lesssim 1 : (R + J)$$

sind. Die m-ten Ableitungen dieser drei $E' \log(\ldots)$ nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : (R + J)^{m+1}$; dabei ist m wie in III zu wählen. Gleiches gilt, wenn man formal E durch $\widetilde{E}$ ersetzt; denn $\widetilde{E}$ geht aus E durch hier unwesentliche Abänderungen der Faktorfunktionen A_0, B_0, C_0 in $\widetilde{A}_0, \widetilde{B}_0, \widetilde{C}_0$ hervor. Ebenso sind alle Beweise für Null anstatt J_0 durchzuführen, wobei (16. 2) zu berücksichtigen ist.

XII. Entsprechend V und VI gilt für das in (16. 1) eingeführte H, daß $H \lessapprox \log\left(1 + \frac{J}{R}\right)$ ist. Die n-ten Ableitungen von H nach (x', y') sind $\lessapprox J : (R + J) \cdot R^n$ für $n = 1, 2, 3$. Die m-ten Ableitungen von H nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : R^m$, wobei m wie in Nr. 16b II zu wählen ist.

XIII. Schließlich beweise ich für das in (16. 5) eingeführte P_0, daß $E' P_0 \lessapprox J : (R + J) \cdot R$ ist; die m-ten Ableitungen von $E' P_0$ verhalten sich wie die $(m + 1)$-ten Ableitungen von H gemäß XII; gleiches gilt für $\widetilde{E}$ anstatt E.

Denn setzt man in (16. 3) $J = J_0$, also $H = P_0$, und vertauscht t mit t', so findet man nach XII in $(E' P_0 - D' P_0)$ und nach X in $D' \log(Q^2 + 4 J_0 J_0')$ Funktionen, die obigen Abschätzungen genügen. Weiter ist $D' \log Q^2 = 0$ wie in (16. 2). Setzt man $z = x$ oder $z = y$, so ist

$$\left(-\log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8 J_0 J_0') + \log Q^2 - \log(Q^2 + 4 J_0 J_0')\right)_{z'}$$
$$= 4 J_0 J_0' \cdot (3 Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8 J_0 J_0') \cdot \frac{(Q^2 - Q^{2\prime\prime})_{z'} \cdot Q^2 - (Q^2 - Q^{2\prime\prime}) \cdot Q_{z'}^2}{(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8 J_0 J_0') \cdot (Q^2 + 4 J_0 J_0') \cdot (Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot Q^2}$$
$$- 4 J_0 \cdot \frac{J_0' \cdot (Q^2 - Q^{2\prime\prime})_{z'} - J_{0\,z'}' \cdot (Q^2 - Q^{2\prime\prime})}{(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + 8 J_0 J_0') \cdot (Q^2 + 4 J_0 J_0')};$$

daraus folgt, daß auch die restlichen Glieder in (16. 3) den behaupteten Abschätzungen genügen.

19. Grundlegende Eigenschaften von P.

a. Auf Grund der Abschätzungen in Nr. 18 und Nr. 16b, auf die ich in dieser Nr. 19 im einzelnen nicht mehr hinweise, ergeben sich folgende *Eigenschaften von* der durch (17. 3) eingeführten Parametrix $P = P(\pi : g_1, g_2, \ldots, g_p)$ *und* von den durch (17. 1) und (16. 5) eingeführten $P = P(\pi : g, \ldots, g)$ *und* $P = P_0$.

I. P ist stetig solange $R > 0$. Die möglichen Ableitungen von P sind in bezug auf x und y, ebenso in bezug auf x' und y' von höchstens dritter Ordnung. Die danach zulässigen m-ten Ableitungen sind stetig für t und t' in b, solange $R > 0$ ist.

II. Es ist $P(\pi : g_1, \ldots, g_p) \lessapprox \Sigma_v C_v C_v' \cdot \log(1 + J_v : R)$ für $v = 1, \ldots, q$; dabei ist C_v wie in Nr. 10a III anzugeben und ist für J_v der kleinere der Werte J_{0v} und J_{00v} zu nehmen. Ferner gilt

$$P(\pi : g, \ldots, g) \quad \text{und} \quad P_0 \lessapprox \log(1 + J : R);$$

dabei ist für J der kleinere der Werte J_0 und J_{00} bzw. $J = J_0$ zu nehmen.

III. Die m-ten Ableitungen von $P(\pi : g_1, \ldots, g_p)$ nach (x', y') sind $\lessapprox \Sigma_v C_v C_v' \cdot J_v : (R + J_v) \cdot R^m$. Die m-ten Ableitungen von $P(\pi : g, \ldots, g)$ und P_0 nach (x', y') sind $\lessapprox J : (R + J) \cdot R^m$. Beidemal ist $m = 1, 2, 3$ und sind C_v, J_v und J wie in II anzugeben. Bei den Differentiationen erhält man zuerst für C_v' andere Funktionen, jedoch mit den gleichen allgemeinen Eigenschaften wie C_v; sie lassen sich wieder durch C_v' abschätzen.

IV. Es ist $P \lessapprox 1 + |\log R|$. Die m-ten Ableitungen von P nach (x, y, x', y') sind $< 1 : R^m$. Dabei ist m wie in I zu wählen.

V. Es ist

$$\Delta' P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + T' P(\pi : g_1, \ldots, g_p) \lessapprox \Sigma_v C_v C_v' \cdot J_v : (R + J_v) \cdot R.$$

Ferner gilt $\Delta' P(\pi : g, \ldots, g) + T' P(\pi : g, \ldots, g)$ und $E' P_0 \lessapprox J : (R + J) \cdot R$. C_v, J_v und J sind wie in II anzugeben.

VI. Die ersten Ableitungen von $\Delta' P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + T' P(\pi : g_1, \ldots, g_p)$ nach x' oder y' sind $\lessapprox \Sigma_v C_v C_v' \cdot J_v : (R + J_v) \cdot R^2$. Die ersten Ableitungen von $\Delta' P(\pi : g, \ldots, g) + T' P(\pi : g, \ldots, g)$ und $E' P_0$ nach x' oder y' sind $\lessapprox J : (R + J) \cdot R^2$. C_v, J_v und J sind wie in II anzugeben.

VII. Es sind $\Delta' P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + T' P(\pi : g_1, \ldots, g_p)$, ferner $\Delta' P(\pi : g, \ldots, g) + T' P(\pi : g, \ldots, g)$ und $E' P_0 \lessapprox 1 : R$. Die möglichen Ableitungen dieser drei Differentialausdrücke nach (x, y, x', y') sind in bezug auf x und y von höchstens dritter Ordnung, dagegen in bezug auf x' und y' von höchstens erster Ordnung. Die danach zulässigen m-ten Ableitungen sind $\lessapprox 1 : R^{m+1}$.

VIII. $4\pi \cdot P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + \log R^2$, ferner $4\pi \cdot P(\pi : g, \ldots, g) + \log R^2$ und $4\pi \cdot P_0 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})$ sind stetig und haben stetige m-te Ableitungen nach (x, y, x', y') für t in $(b - d)$ und t' in b, ebenso für t in b und t' in $(b - d)$, und zwar einschließlich $R = 0$. Dabei ist m wie in I zu wählen.

IX. Es gilt $4\pi \cdot P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + \log R^2 \lesssim 1 + |\Sigma_v C_v C_v' \cdot \log(R + J_v)|$. Ferner sind $4\pi \cdot P(\pi : g, \ldots, g) + \log R^2$ und $4\pi \cdot P_0 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \lesssim 1 + |\log(R + J)|$. C_v, J_v und J sind wie in II anzugeben.

X. Die m-ten Ableitungen von $4\pi \cdot P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + \log R^2$ nach (x, y, x', y') sind $\lesssim \Sigma_v C_v C_v' : (R + J_v)^m$. Die m-ten Ableitungen von $4\pi \cdot P(\pi : g, \ldots, g) + \log R^2$ und $4\pi \cdot P_0 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})$ nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : (R + J)^m$. Dabei ist m wie in I zu wählen. C_v, J_v und J sind wie in II anzugeben.

XI. Es ist $\Delta'(4\pi \cdot P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + \log R^2) + T'(\ldots) \lesssim \Sigma_v C_v C_v' : (R + J_v')$. Ferner gilt

$$\Delta'(4\pi \cdot P(\pi : g, \ldots, g) + \log R^2) + T'(\ldots) \text{ und } E'(4\pi \cdot P_0 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})) \lesssim 1 : (R + J).$$

C_v, J_v und J sind wie in II anzugeben.

XII. Die m-ten Ableitungen von

$$\Delta'(4\pi \cdot P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + \log R^2) + T'(\ldots)$$

nach (x, y, x', y') sind $\lesssim \Sigma_v C_v C_v' : (R + J_v)^{m+1}$. Die m-ten Ableitungen von

$$\Delta'(4\pi \cdot P(\pi : g, \ldots, g) + \log R^2) + T'(\ldots)$$

und $E'(4\pi \cdot P_0 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}))$ nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : (R + J)^{m+1}$. Dabei ist m wie in VII zu wählen. C_v, J_v und J sind wie in II anzugeben.

XIII. $P = P''$, d. h. P ist symmetrisch in t und t'. Man könnte allgemeiner $P'' = \widetilde{P}$ verlangen, wobei $\widetilde{P}$ eine für $(\Delta + \widetilde{T})$ bzw. $\widetilde{E}$ anzugebende unsymmetrische Parametrix mit den Eigenschaften I bis XII wäre. (Das ergäbe keine Vorteile, aber formale Erschwerungen.)

b. *Zusätze.*

XIV. Die genannten Eigenschaften gelten auch bei Vertauschung von t mit t'. Ferner gelten sie, wenn man T durch $\widetilde{T}$ und E durch $\widetilde{E}$ ersetzt. P ist in gleicher Weise Parametrix für das adjungierte Randwertproblem, also $P = \widetilde{P}$.

XV. Die Abschätzungen V, VI und VII werden für $P(\pi : g, \ldots, g)$ und P_0 günstiger, das heißt weniger singulär, wenn man sich auf $E = \Delta$ beschränkt. Es sind nämlich $\Delta' P(\pi : g, \ldots, g)$ und $\Delta' P_0 \lesssim J : (R + J)^2$. Die ersten Ableitungen dieser $\Delta' P$ nach (x', y') sind $\lesssim J : (R + J)^3$. Die m-ten Ableitungen dieser $\Delta' P$ nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : (R + J)^{m+1}$; dabei ist m wie in VII zu wählen.

Für $P(\tau : g_1, \ldots, g_p)$ gilt nichts Entsprechendes, da die Faktoren B_v in (17. 3) das Auftreten von ersten Ableitungen von P auch in $\Delta' P$ erforderlich machen und diese auf R bzw. auf Potenzen von R im Nenner der Abschätzungen führen.

XVI. Neben den durch (17. 3), (17. 1) und (16. 5) eingeführten Parametrizes $P(\tau : g_1, \ldots, g_p)$, $P(\tau : g, \ldots, g)$ und P_0 bestimmte ich noch $P = S_4$ in (15. 2) als Parametrix für ein Rechteck oder eines der dort genannten drei Dreiecke im Fall $E = \Delta + T$, weiter $P = P(\tau : 2, 2, 2, 2)$ in (17. 2) als eine andere Parametrix für ein Rechteck, ferner $P = P_a$ in (16. 6) als Parametrix für b_0 im Fall $E = \Delta$, wenn die den Rand d_0 von b_0 darstellenden $X(s)$ und $Y(s)$ in jedem Bereich $s_{v-1} \leqq s \leqq s_v$ *fünf*mal stetig differenzierbar sind. S_4, $P(\tau : 2, 2, 2, 2)$ und P_a haben die entsprechenden Eigenschaften wie $P(\tau : g_1, \ldots, g_p)$, $P(\tau : g, \ldots, g)$ und P_0. Ihr Verhalten ist (wie in Nr. 15b, 17b und 16d angegeben wurde) teilweise wesentlich weniger singulär.

XVII. $(\Delta P + TP)$ für $P = P(\tau : g_1, \ldots, g_p)$, $P = P(\tau : g, \ldots, g)$, $P = S_4$ und $P = P(\tau : 2, 2, 2, 2)$, weiter EP_0 und ΔP_a, ferner die dazu transponierten und adjungierten Differentialausdrücke führen als Kerne der Integralgleichung

$$W - \int K \cdot W' dt' = M \quad \text{in } b \tag{1. 1}$$

auf den Sonderfall Nr. 1d mit $K = N : R$. Betreffs letzterem gilt die im Abschnitt I entwickelte Auflösungstheorie. Für ΔP_a wird insbesondere $K = N$. Für ΔS_4 und $\Delta P(\tau : 2, 2, 2, 2)$ und die transponierten Fälle wird K sogar mehrfach stetig differenzierbar für t und t' einschließlich $R = 0$. In den letzten Fällen ist der Beweis der Hauptsätze für (1. 1) wesentlich einfacher als im Abschnitt I angegeben durchführbar. Darauf wurde im ersten Satz der Nr. 2c hingewiesen. Das berechtigt die Bevorzugung der eingangs Nr. 15a angegebenen Bereiche.

Vom Randwertproblem herkommend unterscheide ich vier Kerne von (1. 1), nämlich EP, $(EP)'' = E'P$, $\widetilde{E}\widetilde{P} = \widetilde{E}P$ und $(\widetilde{E}\widetilde{P})'' = \widetilde{E}'P$ einschließlich des Normalfalls $(\Delta + T)$ und Sonderfalls Δ von E.

20. Hilfssätze betreffs Vertauschung von Differentiation und Integration.

Diese benötige ich zum Nachweis der in Nr. 21 bis 23 angegebenen weiteren Eigenschaften der Parametrix P. Dabei benutze ich wiederholt Abschätzungen der Nr. 18 und 16b, ohne darauf im einzelnen hinzuweisen.

a. Zuerst bringe ich weitere *Eigenschaften von* $\log Q^2$.

I. Man setze vorübergehend $K = \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})$ oder $K = \log Q^2$ oder $K = \log Q^{2\prime\prime}$. Ferner sei $u = x$ oder $u = y$ und $v = x$ oder $v = y$. Dann sind $(K_u + K_{u'})$ und $(K_{uv} + K_{u'v} + K_{uv'} + K_{u'v'})$ beschränkt für t und t'

in b einschließlich $R = 0$. Insbesondere ist $(\log R^2)_u + (\log R^2)_{u'} = 0$. Die möglichen Ableitungen von $(K_u + K_{u'})$ bzw. von $(K_{uv} + K_{u'v} + K_{uv'} + K_{u'v'})$ nach (x, y, x', y') sind in bezug auf x und y, ebenso in bezug auf x' und y' von höchstens zweiter bzw. ereter Ordnung. Die danach zulässigen m-ten Ableitungen von $(K_u + K_{u'})$ und ebenso von $(K_{uv} + K_{u'v} + K_{uv'} + K_{u'v'})$ sind $\lesssim 1 : R^m$.

Diese Behauptungen ergeben sich aus

$$(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot (\log_u (Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + \log_{u'} (Q^2 + Q^{2\prime\prime}))$$
$$= (C_u + C'_{u'}) \cdot (x' - x)^2 - 2(B_u + B'_{u'}) \cdot (x' - x)(y' - y) + (A_u + A'_{u'}) \cdot (y' - y)^2$$

und ähnlichen Formeln.

II. Man setze vorübergehend $L = -\log Q^{2\prime\prime} + \log (Q^2 + Q^{2\prime\prime})$. Dann sind $(L_u + L_{u'})$ und $(L_{uv} + L_{u'v} + L_{uv'} + L_{u'v'})$ stetig für t und t' in b einschließlich $R = 0$ [12]); u und v wie in I. Die m-ten Ableitungen von $(\ldots)$ nach (x, y, x', y') sind $\lesssim 1 : R^{m-1}$, wobei man m wie in I wähle. Die erste Ableitung von jedem Ausdruck $(\ldots)$ nach x oder y oder x' oder y' ist beschränkt für t und t' in b einschließlich $R = 0$.

Diese Behauptungen ergeben sich aus

$$Q^{2\prime\prime} \cdot (Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot (-\log_u Q^{2\prime\prime} + \log_u (Q^2 + Q^{2\prime\prime}) - \log_{u'} Q^{2\prime\prime} + \log_{u'} (Q^2 + Q^{2\prime\prime}))$$
$$= Q^{2\prime\prime} \cdot ((C_u - C'_{u'}) \cdot (x' - x)^2 - 2(B_u - B'_{u'}) \cdot (x' - x)(y' - y) + (A_u - A'_{u'}) \cdot (y' - y)^2) -$$
$$- (Q^2 - Q^{2\prime\prime}) \cdot (C'_{u'} \cdot (x' - x)^2 - 2B'_{u'} \cdot (x' - x)(y' - y) + A'_{u'} \cdot (y' - y)^2)$$

und ähnlichen Formeln.

III. t liege im Innern von b, das heißt in $(b - d)$. a sei eine positive Zahl, die man so wähle, daß sich die Kreisfläche um t mit dem Halbmesser a und dem Umfang u in $(b - d)$ befindet. t' liege auf u und (X', Y') sei die Parameterdarstellung von u. Dann ist

$$\int ((\log Q^2)_{x'} \cdot (B \cdot X'_{s'} - A \cdot Y'_{s'}) + (\log Q^2)_{y'} \cdot (C \cdot X'_{s'} - B \cdot Y'_{s'}))\, ds' = 4\pi$$

unabhängig von a, wenn sich ds' über u bei in positiver Richtung fortschreitenden s'-Werten erstreckt, wie eine Ausrechnung des Integrals ergibt. Insbesondere ist

$$\int (\log R^2)_{n'}\, ds' = 4\pi. \tag{20. 1}$$

b. *Vertauschung von Differentiation und Integration.*

IV. Es sei $N = N(t, t')$ stetig differenzierbar nach x und y für t und t' in b, wenn $R > 0$ ist. Ferner seien N, N_x und $N_y \lesssim 1 : R^p$ für $0 \leqq p < 2$. $f = f(t)$ habe die in Nr. 3a angegebenen Eigenschaften; $f = f(t)$ sei für t in

[12]) Insbesondere sind diese Ausdrücke $\lesssim R$.

$b = b(\pi : g_1, \ldots, g_q)$ irgendeine integrierbare und beschränkte Funktion. Liegt jedoch $b = b_0$ vor, so verstehe ich unter e eine Konstante, die $2e < 2 - p$ und $0 \leqq e < 1$ genügt und sonst willkürlich ist; dann sei f irgendeine in b_0 integrierbare und in $(b_0 - d_0)$ beschränkte Funktion, die $f \gtrless 1 : n^e$ im Randstreifensystem $0 \leqq n(t) \leqq m$ (Fig. 1 in Nr. 12b) erfüllt. B sei ein Teilbereich von b von gleicher Art wie b, der auch mit b zusammenfallen kann. Dann gilt der

Hilfssatz: $\int N \cdot f' dt'$ *ist stetig differenzierbar in* b; *dabei sind Differentiation und Integration vertauschbar*; dt' *soll sich über* B *erstrecken.*

Der *Beweis* geht davon aus, daß $\int\limits_B N \cdot f' dt'$ und $\int\limits_B N_x \cdot f' dt'$, ausführlicher geschrieben

$$\iint\limits_B N(x, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy' \quad \text{und} \quad \iint\limits_B N_x(x, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy',$$

nach (3. 5) stetig in b sind. (z, y) sei ein fester Punkt in B und C der zu B gehörende Teil des Rechtecks $|z - x'| \leqq c$, $|y - y'| \leqq a$ für $c > |z - x|$, wobei c und a sonst willkürliche, positive Zahlen sind. Dann folgt aus

$$\iint\limits_{B-C} N(x, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy' - \iint\limits_{B-C} N(z, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy'$$
$$= \int\limits_z^x \iint\limits_{B-C} N_x(w, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy'\, dw$$

mittels Grenzprozeß

$$\iint\limits_B N(x, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy' - \iint\limits_B N(z, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy'$$
$$= \int\limits_z^x \iint\limits_B N_x(w, y; x', y') \cdot f(x', y')\, dx'\, dy'\, dw$$

und hieraus

$$\left(\int N \cdot f'\, dt'\right)_x = \int N_x \cdot f'\, dt'.$$

Entsprechendes gilt für die Differentiation nach y.

V. Es sei $M = M(t, t')$ irgendeine stetige Funktion mit stetigen ersten Ableitungen nach x' und y'. Weiter sei $N = N(t, t')$ stetig in t und t' in b, wenn $R > 0$ ist, und überall beschränkt. Ferner führe ich p und B wie in IV ein. Dann gilt der

Hilfssatz: $\int \frac{N(t, w)}{R^p(t, w)} \cdot M(w, t')\, dw$ *hat die gleichen Eigenschaften wie* M; *dabei ist die Differentiation nach* x' *oder* y' *mit der Integration vertauschbar.*

Beweis. Die Stetigkeit von $\int \frac{N(t, w)}{R^p(t, w)} M(w, t')\, dw$, $\int \frac{N(t, w)}{R^p(t, w)} M_{x'}(w, t')\, dw$ und $\int \frac{N(t, w)}{R^p(t, w)} M_{y'}(w, t')\, dw$ in x und y gleichmäßig in t' folgt aus (3. 5) und

diejenige in x' und y' gleichmäßig in t folgt aus (3. 1). Daraus ergibt sich die Stetigkeit dieser Integrale in allen vier Veränderlichen. Weiter ist der Unterschied zwischen $\int \frac{N(t,w)}{R^p(t,w)} M_{x'}(w,t')dw$ bzw. $\int \frac{N(t,w)}{R^p(t,w)} M_{y'}(w,t')\,dw$ und einem zugehörigen Differenzenquotienten von $\int \frac{N(t,w)}{R^p(t,w)} M(w,t')\,dw$ nach (3. 1) beliebig klein zu machen, woraus die Vertauschung von Differentiation und Integration, ferner die Stetigkeit der Ableitungen folgt.

VI. F habe genau die Eigenschaften wie das bekannte Glied der Differentialgleichung $EU = F$, also

(10. 2) $F = F(t) = F(x,y)$ sei stetig in b und stetig differenzierbar in $(b-d)$;

ferner seien F_x und $F_y \lesssim \log n$ für $b = b_0$ und

$\lesssim \Sigma_v C_v \cdot \log n_v$ mit $v = 1, \ldots, q$ für $b = b(\pi : g_1, \ldots, g_p)$.

Zur Abschätzung durch $\log n$ und $\log n_v$ [13]) mache ich die gleichen Voraussetzungen wie in Nr. 10a; daselbst wird auch die Funktion $C_v = C_v(t)$ definiert. Dann gilt der

Hilfssatz: $\int \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F'\,dt'$ *ist eine in* b *stetig differenzierbare Funktion und ihre ersten Ableitungen haben die gleichen allgemeinen Eigenschaften wie* F.

Zum *Beweis* verstehe man unter $g = g(t)$ irgendeine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die $g > 0$ in $(b-d)$ und $g \lesssim n$ bzw. $\lesssim \Sigma_v C_v \cdot n_v$ wie U in (10. 10) genügt. Dann ist (unter Berücksichtigung von IV)

$$\left(\int \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F'\,dt'\right)_x = \int \left(\log_x(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + \log_{x'}(Q^2 + Q^{2\prime\prime})\right) \cdot F'\,dt' +$$
$$+ \int \left(\log\left(1 + \frac{g\,g'}{Q^2 + Q^{2\prime\prime}}\right) \cdot F'\right)_{x'} dt' - \int \left(\log(Q^2 + Q^{2\prime\prime} + gg') \cdot F'\right)_{x'} dt' +$$
$$+ \int \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F'_{x'}\,dt'.$$

Das viertletzte Integral ist nach I und das letzte Integral nach dem Hilfssatz IV stetig differenzierbar. Das drittletzte Integral ist nach dem Gaußschen Satz über die Umwandlung von einem Bereichintegral in ein Randintegral identisch Null. Beim vorletzten Integral ist in $(b-d)$ eine nochmalige Differentiation mit der Integration vertauschbar; die erste Ableitung nach x oder y ist $\lesssim \log n$ bzw. $\lesssim \Sigma_v C_v \cdot \log n_v$. Entsprechendes gilt für die Differentiation nach y. Aus allem folgt das Behauptete.

[13]) Vgl. Fußnote zu Nr. 16a.

VII. Hilfssatz: *Ist F wieder die in* (10. 2) *eingeführte Funktion, so haben* $\int E \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$ und $\int \widetilde{E} \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$ *die gleichen allgemeinen Eigenschaften wie F.*

Zum *Beweis* führe ich g wie in VI ein. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\int (A - A') \cdot \log_{x\,x}(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt' \\
&\quad = \int \Big((A - A') \cdot \log_x \big(1 + \frac{g\,g'}{Q^2 + Q^{2\prime\prime}}\big) \cdot F' \Big)_{x'} dt' \\
&\quad - \int ((A - A') \cdot \log_x (Q^2 + Q^{2\prime\prime} + g g') \cdot F')_{x'} dt' \\
&\quad + \int (A - A')_{x'} \cdot \log_x (Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' \, dt' \\
&\quad + \int (A - A') \cdot \log_x (Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F'_{x'} \, dt' \\
&\quad + \int (A - A') \cdot (\log_x (Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + \log_{x'} (Q^2 + Q^{2\prime\prime}))_x \cdot F' \, dt'.
\end{aligned}$$

Das fünftletzte Integral ist nach dem in VI erwähnten Gaußschen Satz identisch Null. Beim viertletzten Integral ist in $(b - d)$ eine Differentiation mit der Integration vertauschbar; die erste Ableitung nach x oder y ist $\lesssim \log n$ bzw. $\lesssim \Sigma_v C_v \cdot \log n_v$. Das drittletzte Integral ist nach VI wie F, das zweitletzte nach IV und das letzte nach I stetig differenzierbar. Somit ist

$$\int (A - A') \cdot \log_{x\,x}(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' \, dt'$$

von der Art wie F, und gleiches gilt für

$$\int (B - B') \cdot \log_{x\,y}(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt' \text{ und } \int (C - C') \cdot \log_{y\,y}(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' \, dt'.$$

In ähnlicher Weise ist $\int (A \cdot F)' \cdot (-\log Q^{2\prime\prime} + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}))_{x\,x} dt'$ zu zerlegen und zu untersuchen. Dabei tritt die Anwendung von II an die Stelle derjenigen von I. Man findet, daß letzteres Integral und ebenso die beiden weiteren Teilintegrale von $\int D(-\log Q^{2\prime\prime} + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})) \cdot F' dt'$ von der Art wie F sind. Dann ist wegen (16. 2) auch $\int D \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$ von der Art wie F. Aus allem folgt bis jetzt, daß

$$\int (A \cdot \log_{x\,x}(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + 2 \cdot B \log_{x\,y}(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) + C \cdot \log_{y\,y}(Q^2 + Q^{2\prime\prime})) \cdot F' dt'$$

von der Art wie F ist. Die restlichen Teilintegrale von $\int E \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$ und $\int \widetilde{E} \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$ sind nach VI und IV von der Art wie F.

VIII. $\int E' \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$ und $\int \widetilde{E}' \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$ haben die gleichen allgemeinen Eigenschaften wie F.

Das läßt sich auf die gleiche Art wie der vorstehende Hilfssatz VII beweisen.

21. Eigenschaften iterierter Differentialausdrücke von P für eckenfreie Bereiche.

$P = P_0$ ist die durch (16. 5) eingeführte Parametrix für den eckenfreien Bereich b_0 und für den allgemeinsten elliptischen Differentialausdruck E, somit auch für den zu E adjungierten Ausdruck $\widetilde{E}$. Nachfolgend stelle ich die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften der zweiten, dritten und vierten Iteration von $\widetilde{E}' P_0$ und der zweiten Iteration von $E P_0$ fest und schätze diese Iterationen und deren mögliche Ableitungen in bezug auf ihr Verhalten am Rand und für $R \to 0$ ab. Hierzu benutze ich wiederholt die Ergebnisse der Nrn. 3b, 16b, 18, 19 und 20, ferner den Gaußschen Satz über die Umwandlung eines Bereichintegrals in ein Randintegral, ohne im einzelnen darauf hinzuweisen. Diese Ergebnisse, insbesondere die für $\widetilde{E}' P_0$ und $E P_0$, wurden unter wesentlicher Benutzung der Definition von J_0 gewonnen. Erst nachdem diese Ergebnisse feststehen, genügt es für das Folgende, in den bisherigen Abschätzungsergebnissen J_0 erlaubterweise durch das allgemeinere J, das in Nr. 16a eingeführt wurde, zu ersetzen; denn ich benutze in Nr. 21 von J_0 nicht mehr den genauen, im Randstreifensystem definierten Ausdruck für J_0 (Nr. 16c), sondern nur noch die (insbesondere auch für J_0 gültige) allgemeinere Eigenschaft von J, nämlich $J \simeq n$ im Randstreifensystem. Damit werden aber keine Ergebnisse für das in (16. 1) eingeführte H, sondern für P_0 gewonnen. Wenn nun in den folgenden Abschätzungen J steht, so kann man dafür ebenso J_0 setzen.

a. *Eigenschaften von* $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$.

Zusammenstellung: Ich setze

$$\widetilde{E}' P_0^{(2)} = \int \widetilde{E}' P_0(t, q) \cdot \widetilde{E}' P_0(q, t')\, dq.$$

Diese Funktion in t und t' ist stetig und hat stetige erste Ableitungen nach x und y für t und t' in b, wenn $R > 0$ ist. Ferner hat $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$ stetige zweite und dritte Ableitungen nach x und y für t in $(b - d)$ und t' in b, wenn $R > 0$ ist. Es gilt $\widetilde{E}' P_0^{(2)} \lesssim 1 + |\log R|$ und $\widetilde{E}' P_0^{(2)} \lesssim J : R$. Die ersten bzw. zweiten, dritten Ableitungen von $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$ nach (x, y) sind

$$\lesssim \frac{1}{R} \quad \text{bzw.} \quad \lesssim \frac{1+\log(1+R:J)}{R^2}, \quad \lesssim \frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^2 \cdot J}.$$

Beweis: I. $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$ ist stetig für $R > 0$ und ist

$$\lesssim \int \frac{1}{R(t, q)} \cdot \frac{1}{R(q, t')}\, dq \lesssim 1 + |\log R|.$$

Ferner ist

$$\widetilde{E}' P_0^{(2)} \lessgtr \int \frac{J(t)}{R(t,q)\cdot\big(R(t,q)+J(q)\big)} \cdot \frac{J(q)}{R(q,t')\cdot\big(R(q,t')+J(q)\big)}\, dq$$

$$\lessgtr J \cdot \int \frac{1}{R^{3/2}(t,q)} \cdot \frac{1}{R^{3/2}(q,t')}\, dq \lessgtr J : R.$$

II. Ich setze vorübergehend $4\pi \cdot N = 4\pi \cdot P_0 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})$ und

$$F_m = \frac{1}{\big(R(t,q)+J(q)\big)^{m+1}} \cdot \frac{J(q)}{R(q,t')\cdot\big(R(q,t')+J(q)\big)}.$$

Die m-ten Ableitungen von $\int \widetilde{E}' N(t,q)\cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')\, dq$ nach (x, y) sind demnach $\lessgtr \int F_m dq$ für $m = 1, 2, 3$. Es ist

$$\int F_1 dq \lessgtr \int \frac{1}{R^{1+e}(t,q)} \cdot \frac{1}{R^{2-e}(q,t')}\, dq \lessgtr 1 : R.$$

b_a sei eine Kreisfläche um t mit dem Halbmesser a, sofern sie zu b gehört, und etwa $a = R : 2$. Dann ist

$$\int_{b_a} F_m\, dq \lessgtr \frac{1}{R^2} \cdot \int_{b_a} \frac{dq}{\big(R(t,q)+J\big)^m},$$

also $\lessgtr \frac{1}{R^2} \cdot \log(1 + R : J)$ für $m = 2$ und $\lessgtr \frac{1}{R \cdot J \cdot (R+J)}$ für $m = 3$.
Ferner ist

$$\int_{b-b_a} F_m\, dq \lessgtr \int_{b-b_a} \frac{1}{\big(R(t,q)+J(q)\big)^{m+e}} \cdot \frac{1}{R(q,t')\cdot\big(R(q,t')+J(q)\big)^{1-e}}\, dq$$

$$\lessgtr \frac{1}{(R+J)^{m-2+2e}} \cdot \int_{b-b_a} \frac{1}{R^{2-e}(t,q)} \cdot \frac{1}{R^{2-e}(q,t')}\, dq$$

$$\lessgtr \frac{1}{(R+J)^{m-2}} \cdot \frac{1}{R^2} \quad \text{für } m = 2 \text{ und } 3.$$

Demnach gelten die Behauptungen für die Ableitungen von

$$\int \widetilde{E}' N(t,q)\cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')\, dq.$$

III. Es sind noch die m-ten Ableitungen von $\int \widetilde{E}' \log\big(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)\big)\cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')\, dq$ nach (x, y) für $m = 1, 2, 3$ zu untersuchen. t_0 sei ein festbleibender Punkt von b und R_0 seine Entfernung von t'. Der veränderliche Punkt t liege nicht weiter als etwa $R_0 : 4$ von t_0 entfernt, also $R \sim R_0$.

Den zum Ausgangsbereich b gehörenden Teil der Kreisfläche um t_0 mit dem Halbmesser $R_0 : 2$ bezeichne ich mit k. Ferner sei $q = (w, z)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\int_b \widetilde{E}' \log(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')\, dq \\
&= \int_{b-k} \widetilde{E}' \log(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')\, dq \\
&+ \int_k (A(q) - A(t)) \cdot \log_{ww}(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')dq \\
&+ 2\int_k (B(q) - B(t)) \cdot \log_{wz}(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')\, dq \\
&+ \int_k (C(q) - C(t)) \cdot \log_{zz}(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')dq \\
&+ \int_k D' \left[-\log Q^2(t,q) + \log(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \right] \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')dq \\
&+ \int_k D' \log Q^2(t,q) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')dq \\
&+ \int_k \widetilde{A}_0(q) \cdot \log_w(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')dq \\
&+ \int_k \widetilde{B}_0(q) \cdot \log_z(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')\, dq \\
&+ \int_k \widetilde{C}_0(q) \cdot \log(Q^2(t,q) + Q^{2\prime\prime}(t,q)) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')dq.
\end{aligned}$$

Das viertletzte Integral verschwindet identisch wegen (16. 2). Das Integral über $(b - k)$ hat stetige m-te Ableitungen nach x und y für $R > 0$, die $\lesssim \int_{b-k} \frac{1}{R^{m+1}(t,q)} \cdot \frac{1}{R(q,t)}\, dq \lesssim 1 : R^m$ sind. Die Ableitungen der übrigen Teilintegrale sind einzeln den (am Anfang der Nr. 21a zusammengestellten) Behauptungen gemäß abzuschätzen. Dabei sind wiederholt partielle Integrationen und weitere Zerlegungen ähnlich der obigen anzuwenden. Die Einzelabschätzungen verlaufen dann ähnlich wie die vorstehend in II oder in Nr. 20 VII angegebenen. Es treten auch Randintegrale über den in $(b - d)$ liegenden Teil des Kreisumfangs von k auf, die sich im Ergebnis ebenso wie die Integrale über k abschätzen lassen. Die genaue Durchrechnung beweist die eingangs behauptete Zusammenstellung der Eigenschaften von $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$.

b. *Eigenschaften von* $\widetilde{E}' P_0^{(3)}$.

Zusammenstellung: Ich setze

$$\widetilde{E}' P_0^{(3)} = \int \widetilde{E}' P_0(t,q) \cdot \widetilde{E}' P_0^{(2)}(q,t')dq = \int \widetilde{E}' P_0^{(2)}(t,q) \cdot \widetilde{E}' P_0(q,t')dq.$$

Diese Funktion ist stetig für t und t' in b einschließlich $R = 0$; es gilt $\widetilde{E}' P_0^{(3)} \leqq J \cdot (1 + |\log R|)$. Weiter hat $\widetilde{E}' P_0^{(3)}$ stetige erste Ableitungen

nach x und y für t und t' in b, wenn $R > 0$ ist; diese sind $\lesssim 1 + |\log R|$. Ferner hat $\widetilde{E}' P_0^{(3)}$ stetige zweite und dritte Ableitungen nach x und y für t in $(b - d)$ und t' in b, wenn $R > 0$ ist; diese sind

$$\lesssim \frac{1}{R^{1+e}} + \frac{\log(1 + R:J)}{R} \quad \text{und} \quad \lesssim \frac{1}{R^{2+e}} + \frac{1}{R^{1+e} \cdot J},$$

wobei e irgendeine $0 < e < 1$ genügende Zahl bedeute. Durch genaueres Eingehen auf $\widetilde{E}' P_0^{(3)}$ kann man schärfere Abschätzungen angeben, die ich jedoch bei der Anwendung nicht benötige.

Der *Beweis* verläuft ähnlich dem entsprechenden für $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$ und unterscheidet sich günstigerweise im wesentlichen dadurch von ihm, daß die ersten Ableitungen des Faktors $\widetilde{E}' P_0^{(2)}(t, q)$ nach (x, y) und ebenso von $\widetilde{E}' P_0^{(2)}(q, t')$ nach (w, z) im Gegensatz zu den entsprechenden von $\widetilde{E}' P_0$ integrierbar sind. Darum lassen sich die Aussagen über die ersten Ableitungen von $\widetilde{E}' P_0^{(3)}$ ohne die in a III angegebene Zerlegung beweisen. Zur Untersuchung der zweiten und dritten Ableitungen ist jedoch eine solche Zerlegung zu benutzen. Dabei ist die Abtrennung der Integration über k erst *nach* partieller Integration und anschließender Vertauschung von Integration und einmaliger Differentiation erforderlich.

Andererseits tritt gegenüber dem Beweis für $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$ eine neue Schwierigkeit auf. Denn in den nach obigem Verfahren vorkommenden Teilintegralen der Art $\int_k \log_w (Q^2(t, q) + Q^{2\prime\prime}(t, q)) \cdot \widetilde{E}' P_{0\,ww}^{(2)}(q, t')\, dq$ kann man nicht mehr partiell integrieren, um sie einer nochmaligen Differentiation zugänglich zu machen, weil $\widetilde{E}' P_{0\,www}^{(2)}(q, t')$ trotz der Beschränkung von q auf k wegen des Randverhaltens wie $1 : J(q)$ nicht integrierbar ist. In solchen Fällen gebe man eine ganz im Innern von k gelegene Kreisfläche h um t_0 mit dem Halbmesser a an und beschränke t so, daß t nicht weiter als etwa $a : 2$ von t_0 entfernt liegt. Ferner wähle man $a < R_0 : 4$ und a so klein, daß $J(q) \asymp J(t)$ für q in h ist. Hierdurch kann man die beiden Sonderfälle, daß q auf dem Rand d von b liegt und daß q mit t zusammenfällt, verschiedenen Integralen zuweisen. Dann läßt sich

$$\int_k \log_w (Q^2(t, q) + Q^{2\prime\prime}(t, q)) \cdot \widetilde{E}' P_{0\,ww}^{(2)}(q, t')\, dq$$

$$= \int_{k-h} \ldots dq + \int_h \left[\log(\ldots) \cdot \widetilde{E}' P_{0\,ww}^{(2)}(q, t')\right]_w dq - \int_h \log(\ldots) \cdot \widetilde{E}' P_{0\,www}^{(2)}(q, t')\, dq$$

in der geforderten Weise abschätzen.

c. *Eigenschaften von* $\widetilde{E}' P_0^{(4)}$.

Zusammenstellung: Ich setze

$$\widetilde{E}' P_0^{(4)} = \int \widetilde{E}' P_0(t, q) \cdot \widetilde{E}' P_0^{(3)}(q, t')\, dq = \int \widetilde{E}' P_0^{(3)}(t, q) \cdot \widetilde{E}' P_0(q, t')\, dq.$$

Diese Funktion ist stetig und hat stetige erste Ableitungen nach x und y für t und t' in b einschließlich $R = 0$; es gilt $\widetilde{E}' P_0^{(4)} \lesseqgtr J$. Ferner hat $\widetilde{E}' P_0^{(4)}$ stetige zweite und dritte Ableitungen nach x und y für t in $(b - d)$ und t' in b, wenn $R > 0$ ist; diese sind $\lesssim \frac{1}{R^e} + |\log J| \cdot |\log R|$ und $\lesssim \frac{1}{R^e \cdot J} + \frac{1 + \log(1 + R:J)}{R^{1+e}}$, wobei e irgendeine $0 < e < 1$ genügende Zahl bedeute. Durch genaueres Eingehen auf $\widetilde{E}' P_0^{(4)}$ kann man schärfere Abschätzungen angeben, die ich jedoch bei der Anwendung nicht benötige.

Der *Beweis* verläuft ähnlich dem für $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$ und $\widetilde{E}' P_0^{(3)}$. Nunmehr lassen sich auch die Aussagen über die zweiten Ableitungen von $\widetilde{E}' P_0^{(4)}$ ohne die in a III angegebene Zerlegung beweisen. Jedoch ist zur Untersuchung der dritten Ableitungen die beim Beweis für $\widetilde{E}' P_0^{(3)}$ eingeführte Zerlegung gewisser Integrale in die über $(b - h)$ und die über h erforderlich.

d. *Eigenschaften von* $E P_0^{(2)}$.

Zusammenstellung: Ich setze

$$E P_0^{(2)} = \int E P_0(t, q) \cdot E P_0(q, t')\, dq.$$

Diese Funktion ist stetig für t und t' in b, wenn $R > 0$ ist; es gilt $E P_0^{(2)} \lesssim 1 + |\log R|$. Ferner hat $E P_0^{(2)}$ stetige erste Ableitungen nach x und y für t in $(b - d)$ und t' in b, wenn $R > 0$ ist; diese sind $\lesssim \frac{1 + \log(1 + R:J)}{R}$.

Der *Beweis* ist ähnlich dem für die ersten Ableitungen von $\widetilde{E}' P_0^{(2)}$ zu führen. Während beidemal nach den im ersten Faktor von $\int \ldots dq$ vorkommenden x und y zu differenzieren ist, steht jetzt im Zähler der Abschätzung des ersten bzw. zweiten Faktors $J(q)$ bzw. $J(t')$ zum Unterschied von $J(t)$ bzw. $J(q)$ in $\widetilde{E}' P_0^{(2)} = \int \ldots dq$. Es kann daher der Zähler des zweiten Faktors den Nenner des ersten jetzt nicht mehr abschätzen. Das bedingt die angegebene Abweichung des obigen Ergebnisses von dem der Nr. 21a auf Grund folgender Abänderung des Beweisverfahrens. N und b_a führe ich wie in a II ein. Die ersten Ableitungen von $\int E N(t, q) \cdot E P_0(q, t') dq$ nach x und y sind demnach

$$\begin{aligned}
&\lesssim \int_b \frac{1}{(R(t,q) + J(q))^2} \cdot \frac{1}{R(q,t')}\, dq \\
&\lesssim \frac{1}{R} \cdot \int_{b_a} \frac{dq}{(R+J)^2} + \frac{1}{(R+J)^e} \cdot \int_{b-b_a} \frac{1}{R^{2-e}(t,q)} \cdot \frac{1}{R(q,t')}\, dq \\
&\lesssim \frac{\log(1 + R:J)}{R} + \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der Behauptung. In entsprechender Weise sind die Abschätzungen der weiteren Teilintegrale abzuändern.

22. Eigenschaften iterierter Differentialausdrücke von P für Bereiche mit Ecken $\pi : g$.

a. Die in Nr. 21 für $P = P_0$ nachgewiesenen *Eigenschaften* gelten auch *für* die durch (17. 1) eingeführte Parametrix $P = P(\pi : g, \ldots, g)$ für den Bereich $b = b(\pi : g, \ldots, g)$ mit untereinander gleichen Ecken $e = \pi : g$, die nicht auf einen der möglichen Doppelpunkte des Randes d fallen, wenn man daselbst $E = \Delta + T$ (Normalform von E) setzt und in den Abschätzungsergebnissen unter J den kleineren der Werte J_0 und J_{00} versteht.

Zum Beweise schreibe ich die iterierten Ausdrücke $(\Delta' P(\pi : g, \ldots, g) + \widetilde{T}' P(\pi : g, \ldots, g))^{(v)}$ für $v = 2, 3, 4$ wieder in der Form $\int L(t, q) \cdot M(q, t') dq = N(t, t')$ an; dabei bedeutet $L = L(t, t')$ und ebenso $M = M(t, t')$ eine Iteration von $(\Delta' P + \widetilde{T}' P)$ von niedrigerem als v-ten Grad bzw. diese Funktion selbst entsprechend den Definitionen eingangs Nr. 21a, b, c und d. Hierauf wende ich die in Nr. 21 benutzten Zerlegungen der Integrationsbereiche und Integranden, ferner Differentiationen und partielle Integrationen soweit als möglich an, wenn nur die Teilintegrale wieder von der Form N sind und L von $(\Delta' P(t, q) + \widetilde{T}' P(t, q))$ allein und M von $(\Delta' P(q, t') + \widetilde{T}' P(q, t'))$ allein abstammt. Dabei bringen die Reduktionen von E auf $(\Delta + T)$ und Q auf R einige Vereinfachungen mit sich. In solchen N schätze man, sofern das in dem Verfahren der Nr. 21 vorgesehen ist, sowohl L als auch M für sich genommen (und nicht gegenseitig) durch R und J ab. Fallen alle J aus dem Integranden heraus, so ist N wie in Nr. 21 zu majorisieren. Die übrigen Teilintegrale haben wieder die Form N. Nach diesem ersten Abschätzungsschritt tritt J in L bzw. in M nur als Funktion von t bzw. q auf. $J(t)$ als Faktor des Zählers von L ist wie in Nr. 21 entweder aus dem Integral herauszunehmen oder gegen eine positive Potenz des Nenners $R(t, q) + J(t)$ auszugleichen. Bezeichne ich die so aus L hervorgehende Funktion wieder mit L, dann kommt J in L nur im Nenner vor und dieser ist eine positive Potenz von $R(t, q) + J(t)$. Dabei ist $J(t)$ der kleinere der Werte $J_0(t)$ und $J_{00}(t)$. Ich zerlege b so in k_0 und k_{00}, daß $J_0 \leqq J_{00}$ für t in k_0 und $J_{00} < J_0$ für t in k_{00} gilt und setze $b = k_0 + k_{00}$. Für N nehme ich zuerst an, daß t in k_0 liegt, also $J(t) = J_0(t)$ ist. Soweit sich dq in N nur über k_0 erstreckt, ist $J = J_0(q)$ in M zu setzen und die weitere Abschätzung wie in Nr. 21 durchzuführen. Sofern sich dq über k_{00} erstreckt, ist $J = J_{00}(q)$ in M zu setzen. Dann führe ich $R(t, q) + J_0(q) \sim R(t, q) + J_0(t)$ im Nenner von L ein (das ist der Kernpunkt dieses Beweises) und ersetze $R(t, q) + J_0(q)$ durch das kleinere $R(t, q) + J_{00}(q)$; weiter schätze ich wieder wie in Nr. 21 ab. Demnach geht im Ergebnis vorerst $J = J_{00}(t)$ und zwar im Nenner ein, was ich durch das für t in k_0 kleinere $J_0(t)$ ersetze. Liegt andrerseits von vornherein t in k_{00}, so erscheint nach gleichem Verfahren $J = J_{00}(t)$ im endgültigen Ergebnis. Damit ist die Behauptung

hinsichtlich $(\Delta' P(\pi : g, \ldots, g) + \widetilde{T}' P(\pi : g, \ldots, g))^{(v)}$ für $v = 2, 3, 4$ bewiesen. Entsprechend ist betreffs $(\Delta P(\pi : g, \ldots, g) + T P(\pi : g, \ldots, g))^{(2)}$ zu verfahren.

b. Die in Nr. 21 für $P = P_0$ nachgewiesenen *Eigenschaften* gelten ferner auch *für* die durch (17. 3) eingeführte Parametrix $P = P(\pi : g_1, \ldots, g_p)$ für den allgemeineren eckigen Bereich $b = b(\pi : g_1, \ldots, g_p)$, wenn man daselbst $E = \Delta + T$ und in den Abschätzungsergebnissen $\Sigma_v C_v C'_v \cdot J_v$ anstatt J, weiter $\Sigma_v C_v C'_v : J_v$ anstatt $1 : J$, ferner $|\Sigma_v C_v C'_v \cdot \log J_v|$ anstatt $|\log J|$ und schließlich $\Sigma_v C_v C'_v \cdot \log(1 + R : J_v)$ anstatt $\log(1 + R : J)$ setzt; dabei ist C_v wie in Nr. 10 a III anzugeben und ist für J_v der kleinere der Werte J_{0v} und J_{00v} zu nehmen.

Beweis. Bildet man $(\Delta' P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + \widetilde{T}' P(\pi : g_1, \ldots, g_p))^{(v)}$ aus (17. 3), so kommt in $(\ldots)^{(2)}$ beispielsweise der Summand

$$\Sigma_u \Sigma_v B_u B'_v \cdot \int B_u(q) \cdot \Delta' P(\pi : g_u, \ldots, g_u; t, q) \cdot B_v(q) \cdot \Delta' P(\pi : g_v, \ldots, g_v; q, t')\, dq$$

vor. Ein jeder der hierin auftretenden Integranden ist nur dann nicht identisch Null, wenn q sowohl in b_u als auch in b_v liegt, daher in folgenden drei Fällen:

I. q in b_u, wenn $u = v \geqq 1$ ist,

II. q in b_{1v}, wenn $u = 1$ und $v > 1$ ist,

III. q in b_{1u}, wenn $v = 1$ und $u > 1$ ist.

Der sonst noch eintretende Fall ist $u > 1$ und $v > 1$, wenn $u \neq v$ ist; dann verschwindet der Integrand identisch. Im Fall I hat $\int \ldots dq$ die in Nr. 22a angegebenen Eigenschaften von $\Delta' P^{(2)}(\pi : g_u, \ldots, g_u)$. Im Fall II ist, wenn q innerhalb $K(s_{ew}, 3a)$ liegt, $B_u(q) = B_1(q) \leqq J_{1r}^{\frac{1}{4}}$, und, wenn q außerhalb $K(s_{ew}, 4a)$ liegt, $B_v(q) \leqq J_{1v}^{\frac{1}{4}}$; beides führt auf günstigere Abschätzungen als gefordert wurden; liegt q im Ringstück $K(s_{ew}, 4a) - K(s_{ew}, 3a)$, so sind die Abschätzungen im wesentlichen die gleichen wie im Fall I. Also hat $\int \ldots dq$ im Fall II und nach gleichem Verfahren im Fall III die in Nr. 22a angegebenen Eigenschaften von $(\Delta' P(\pi : g_w, \ldots, g_w) + \widetilde{T}' P(\pi : g_w, \ldots, g_w))^{(2)}$ für $w = v$ und $w = u$. Die übrigen Summanden von $(\Delta' P(\pi : g_1, \ldots, g_p) + \widetilde{T}' P(\pi : g_1, \ldots, g_p))^{(2)}$ sind von ähnlicher Form wie die oben behandelten. Damit ist der Satz betreffs $(\ldots)^{(2)}$ bewiesen und ähnlich läßt er sich für die übrigen Iterationen beweisen.

23. Verallgemeinerte Greensche Formeln für die Singularitätenfunktion.

Zum Schluß der Herleitung der Eigenschaften der Parametrix P zeige ich, inwiefern diese eine Verallgemeinerung der Eigenschaften der Greenschen Funktion G sind, die in Nr. 11a I bis IV zusammengestellt und in Nr. 12a als Eigenschaften der Parametrix für das Hilbertsche Beispiel gekürzt wiederholt

wurden. Nr. 11a I ist auch für P anstatt G erfüllt. An Stelle von Nr. 11a III tritt allgemeiner (12. 1) als Ersatz dafür, daß P im Gegensatz zu G keiner Differentialgleichung genügt; dazu kommt noch, daß P die gleichen, dort und in (12. 3) angegebenen Randbedingungen wie G erfüllt. Letzteres gilt, wie ich im Abschnitt IV ausführen werde, nicht mehr für das allgemeinste G, daß ich aus P bilde. Ich werde in dieser Nr. 23 nachweisen, daß die G-Eigenschaften Nr. 11a II und IV auch für die im Abschnitt II gebildeten P anstatt G bestehen. Allgemeiner beweise ich im Hinblick auf die Eigenschaften von dem aus P zu bildenden allgemeinsten G die Greenschen Formeln Nr. 11a II für eine gewisse, P umfassende Funktion, die ich Singularitätenfunktion nenne (im Anschluß an das am Ende von Nr. 11c I Geschriebene). Ich habe dabei auch U und F durch allgemeinere Funktionen zu ersetzen und Einschränkungen in bezug auf die Gültigkeit am Rand vorzunehmen. Aus diesen so verallgemeinerten Greenschen Formeln werde ich dann folgern, daß $\int P \cdot F' dt'$ entsprechend Nr. 11a IV die allgemeinen U-Eigenschaften hat.

a. $H = H(t, t')$ sei irgendeine Funktion, die folgende Voraussetzungen erfüllt [14]).

I. H sei zweimal stetig differenzierbar nach (x, y) für t und t' in b, solange $R > 0$ ist. Ferner seien $H \lesssim 1 + |\log R|$, H_x und $H_y \lesssim 1 : R$.

II. Es seien EH und $\widetilde{E}' H \lesssim 1 : R$.

III. Es sei $4\pi \cdot H + \log (Q^2 + Q^{2\prime\prime})$ zweimal stetig differenzierbar nach (x, y) für t in $(b - d)$ und t' in b einschließlich $R = 0$. (Q wurde in Nr. 16a eingeführt.) Gleiches gelte für t in b und t' in $(b - d)$.

IV. $H'' = H''(t, t') = H(t', t)$ erfülle I bis III für H'' anstatt H.

Insbesondere bezeichne ich H mit $H_0 = H_0(t, t')$, wenn

V. $H_0 = 0$ für t auf d, t' in b, und $H_0 = 0$ für t' auf d, t in b, besteht; beidemal soll $R > 0$ sein.

Ich nenne $S = S(t, t')$ eine *Singularitätenfunktion* in bezug auf einen in b vorgegebenen Differentialausdruck E, wenn in $S = H + (S - H)$ der „Hauptbestandteil" H obige Voraussetzungen I bis IV erfüllt. Weiter sollen der „Nebenbestandteil" $(S - H)$ sowie alle ersten und zweiten Ableitungen von $(S - H)$ nach (x, y) in dem nachfolgend angegebenen Umfang sich ebenso abschätzen lassen wie $\widetilde{E}' P^{(3)}$ und seine Ableitungen gemäß Nr. 21b und 22. Entsprechendes gelte bei Vertauschung von t mit t'.

VI. $(S - H)$ sei stetig für t und t' in b einschließlich $R = 0$. $(S - H)$ habe stetige erste bzw. zweite Ableitungen nach (x, y) für t in b bzw. t in $(b - d)$ und t' in b, solange $R > 0$ ist. Die ersten Ableitungen von $(S - H)$ nach (x, y) seien $\lesssim 1 + |\log R|$.

---

[14]) Diese Funktion H hat nichts mit der durch (16. 1) eingeführten Funktion zu tun.

VII. Die zweiten Ableitungen von $(S - H)$ nach (x, y) seien

$$\lesssim \frac{1}{R^{1+\varepsilon}} + \frac{\log(1+R:n)}{R} \quad \text{für} \quad b = b_0$$

und

$$\lesssim \frac{1}{R^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{R} \cdot \Sigma_\nu C_\nu C'_\nu \cdot \log(1 + R : n_\nu) \quad \text{für} \quad b = b(\pi : g_1, \ldots, g_p),$$

wenn t, n_ν und C_ν die Voraussetzungen I, II und III der Nr. 10a erfüllen. Dabei sind die $\log(1 + R : n)$ und $\log(1 + R : n_\nu)$ außerhalb der Randstreifen, in denen n und n_ν erklärt sind, zu streichen.

VIII. $(S'' - H'')$ erfülle VI und VII für $(S'' - H'')$ anstatt $(S - H)$.

Von einer spezielleren Singularitätenfunktion $S_0 = S_0(t, t')$ fordere ich, daß in $S_0 = H_0 + (S_0 - H_0)$ der Hauptbestandteil H_0 obige Voraussetzungen I bis V und der Nebenbestandteil $(S_0 - H_0)$ außer den Voraussetzungen VI bis VIII noch

IX. $S_0 - H_0 = 0$ für t auf d und t' in b, ferner $S_0 - H_0 = 0$ für t' auf d und t in b, beidemal einschließlich $R = 0$, erfüllt. S_0 genügt damit V für S_0 anstatt H_0.

$P(\pi : g_1, \ldots, g_p)$, $P(\pi : g, \ldots, g)$, $P = S_4$ und $P(\pi : 2, 2, 2, 2)$ besitzen für $E = \Delta + T$, ferner P_0 bei allgemeinem E und P_a für $E = \Delta$ die für H_0 angegebenen Eigenschaften. Folglich ist mit der Existenz von P auch die von H_0, H, S_0 und S in den angegebenen Fällen bewiesen [15]).

b. Ich behaupte für obige Singularitätenfunktion S_0 die (11. 1) verallgemeinernde *partielle Integration* (vgl. Nr. 12a II 1)

$$\int S_0 \cdot E' g' dt' = \int \widetilde{E}' S_0 \cdot g' dt' - g \quad \text{für } t \text{ in } b; \tag{23. 1}$$

dabei sei $g = g(t)$ irgendeine Funktion, die (10. 3, 6) für g anstatt U erfüllt, nämlich:

g sei stetig in b und zweimal stetig differenzierbar in $(b - d)$; g_x und g_y seien beschränkt in b; Eg sei integrierbar in b (etwa $\lesssim : n^\varepsilon$ usw.); ferner:

$g = 0$ auf d.

Zum Beweis mögen t und die Kreisfläche k um t mit einem Halbmesser $a > 0$ und dem Umfang u vorerst in $(b - d)$ liegen. Ferner sei c ein Liniensystem in $(b - d)$, das parallel zu d zwischen d und u in hinreichender Nähe von d verläuft. Bei eckigen Bereichen wurden alle Eckenwinkel $e < \pi$ angenommen. Dann sind die überschüssigen Stücke der c bildenden Parallellinien zu d, die über die Ecken hinausgehen, zu streichen. Das Randstreifen-

[15]) Demnach ist H selbst eine Singularitätenfunktion und insbesondere P wie H_0 eine Singularitätenfunktion von der Art wie S_0.

system von b zwischen d und c bezeichne ich in nachfolgender Formel mit r. Ich gehe von einer Greenschen Formel für Funktionen aus, die in einem abgeschlossenen Bereich durchweg zweimal stetig differenzierbar sind (Lit. Sternberg, S. 1134). Danach besteht

$$\begin{aligned}
&\int_{b-k-r} S_0 \cdot E' g'\, dt' = \int_{b-k-r} \widetilde{E}' S_0 \cdot g'\, dt' + \\
&+ \int_u \Big((g' \cdot S_{0x'} - S_0 \cdot g'_{x'}) \cdot (A' \cdot \cos(n', x') + B' \cdot \cos(n', y')) + \\
&+ (g' \cdot S_{0y'} - S_0 \cdot g'_{y'}) \cdot (B' \cdot \cos(n', x') + C' \cdot \cos(n', y')) + \\
&+ S_0 \cdot g' \cdot (A'_{x'} + B'_{y'} - A'_0) \cdot \cos(n', x') + \\
&+ S_0 \cdot g' \cdot (B'_{x'} + C'_{y'} - B'_0) \cdot \cos(n', y') \Big)\, ds' + \int_c (\ldots)\, ds';
\end{aligned}$$

die beiden Randintegrale sollen sich über die in positiver Richtung fortschreitenden s-Werte erstrecken; n auf u ist die von t wegweisende Normale; n auf c soll für $c \to d$ in n auf d übergehen. Hieraus folgt für $c \to d$, wenn man die Eigenschaften von S_0, ferner Nr. 3a, 16b III und 20a III berücksichtigt:

$$\int_{b-k} S_0 \cdot E' g'\, dt' = \int_{b-k} \widetilde{E}' S_0 \cdot g'\, dt' + \int_u (\ldots)\, ds',$$

somit

$$\begin{aligned}
4\pi \cdot \Big(\int_b S_0 \cdot E' g'\, dt' - \int_b \widetilde{E}' S_0 \cdot g'\, dt' \Big) &= \lim_{a \to 0} 4\pi \cdot \int_u (\ldots)\, ds' \\
&= -g \cdot \int_u \big((\log Q^2)_{x'} \cdot (B \cdot X'_{s'} - A \cdot Y'_{s'}) + \\
&\quad + (\log Q^2)_{y'} \cdot (C \cdot X'_{s'} - B \cdot Y'_{s'}) \big)\, ds' = -4\pi \cdot g.
\end{aligned}$$

Denn der Wert des angeführten $\lim 4\pi \cdot \int_u (\ldots)\, ds'$ bleibt erhalten, wenn ich im Integranden

1) alle Glieder mit dem Faktor S_0 streiche,
2) die Ableitungen von

$$\begin{aligned}
4\pi \cdot S_0 &= (4\pi \cdot S_0 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})) - \\
&\quad - (-\log Q^2 + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})) - \log Q^2
\end{aligned}$$

durch die von $(-\log Q^2)$ ersetze,
3) g, A, B, C anstatt g', A', B', C' schreibe,
4) $\cos(n, x) = -Y_s$ und $\cos(n, y) = +X_s$ einführe.

Damit ist die Gültigkeit der Gleichung (23. 1) unter Beschränkung von t auf $(b - d)$ bewiesen. Da g und die beiden Integrale in (23. 1) wegen (3. 5) stetig sind und (23. 1) in $0 = 0$ für t auf d übergeht, besteht (23. 1) vollständig.

c. Ferner behaupte ich für die allgemeine Singularitätenfunktion S die (11. 2) verallgemeinernde *Vertauschung von Differentiation und Integration* (vgl. Nr. 12a II 2):

$$(23.\,2) \qquad E\int S\cdot f'\,dt' = \int ES\cdot f'\,dt' - f \quad \text{für} \quad t \text{ in } (b-d);$$

dabei sei $f = f(t)$ irgendeine in $(b-d)$ stetig differenzierbare und im ganzen b integrierbare Funktion. Ich lasse somit beispielsweise $f \lesssim 1 + |\log n|$, f_x und $f_y \lesssim 1 : n$ im Randstreifen $0 \leqq n \leqq m$, $0 \leqq s \leqq s_c$ längs d_0 zu. Man kann b durch irgendeinen Teilbereich von b, der die gleichen allgemeinen Eigenschaften wie b hat, ersetzen.

Zum Beweis sei t_0 ein Punkt in $(b-d)$ und a eine positive ganze Zahl so, daß die Kreisfläche k um t_0 mit dem Halbmesser a und dem Umfang u in $(b-d)$ liegt und t im Innern enthält. Ich werde (23. 2) aus der Identität

$$4\pi\int_b S\cdot f'\,dt' = 4\pi\cdot\int_{b-k} S\cdot f'\,dt' + \int_k (4\pi\cdot S + \log(Q^2+Q^{2\prime\prime}))\cdot f'\,dt' - \\ - \int_k (-\log Q^2 + \log(Q^2+Q^{2\prime\prime}))\cdot f'\,dt' - \int_k \log Q^2\cdot f'\,dt'$$

folgern. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von S, weiter von einigen Ergebnissen der Nrn. 3a, 16b und 20, ferner von dem in Nr. 20b VI erwähnten Gaußschen Satz, erhalte ich:

1) $\lim E\int_{b-k} S\cdot f'\,dt' = \int_b ES\cdot f'\,dt'$ für $a\to 0$, weil $\int_k ES\cdot f'\,dt' \lesssim a$ ist.

2) $\lim E\int_k (4\pi\cdot S + \log(Q^2+Q^{2\prime\prime}))\cdot f'\,dt' = \lim \int_k E(\ldots)\cdot f'\,dt' = 0$

für $a\to 0$.

3) $\lim E\int_k (-\log Q^2 + \log(Q^2+Q^{2\prime\prime}))\cdot f'\,dt' = 0$,

weil $\int_k E(\ldots)\cdot f'\,dt' \lesssim a$ ist.

4) Aus $(\int_k \log Q^2\cdot f'\,dt')_x = \int_k (\log_x Q^2 + \log_{x'} Q^2)\cdot f'\,dt' + \int_k \log Q^2\cdot f'_{x'}\,dt' +$

$+ \int_u \log Q^2\cdot f'\cdot Y'_{s'}\,ds'$ folgt $(\int_k \log Q^2\cdot f'\,dt')_{xx} = \int_k (\log_x Q^2 + \log_{x'} Q^2)_x\cdot f'\,dt' +$

$+ \int_k \log_x Q^2\cdot f'_{x'}\,dt' + \int_u \log_x Q^2\cdot f'\cdot Y'_{s'}\,ds'$, somit $\lim((\int_k \log Q^2\cdot f'\,dt')_{xx} -$

$- \int_u \log_x Q^2\cdot f'\cdot Y'_{s'}\,ds') = \lim((\int_k \log Q^2\cdot f'\,dt')_{xx} + f\cdot\int_u \log_{x'} Q^2\cdot Y'_{s'}\,ds') = 0$

für $a\to 0$.

Entsprechende Formeln gelten für $(\int_k \log Q^2 \cdot f' dt')_{xy}$, ferner für $(\ldots)_{yx}$ und $(\ldots)_{yy}$. Berücksichtigt man noch

$$\lim (\int_k Q^2 \cdot f' dt')_x = 0, \quad \lim (\ldots)_y = 0$$

und

$$\lim (\ldots) = 0 \quad \text{für} \quad a \to 0,$$

so erhält man

$$\lim E \int_k \log Q^2 \cdot f' dt' = \lim f \cdot \int_u ((\log Q^2)_{x'} \cdot (B \cdot X'_{s'} - A \cdot Y'_{s'}) + (\log Q^2)_{y'} \cdot (C \cdot X'_{s'} - B \cdot Y'_{s'})) ds' = 4\pi \cdot f.$$

Aus 1) bis 4) folgt (23. 2). Am Beweis ändert sich nichts, wenn man dabei b durch einen Teilbereich von b ersetzt, der die gleichen allgemeinen Eigenschaften wie b hat.

d. *Zusätze zu den Greenschen Formeln.*

I. Das rechts in (23. 2) vorkommende Integral ist bei Einschränkung von S auf H nach (3. 5) stetig in b. Demnach gilt (23. 2) bei stetigem f mit $S = H$ für $\lim (x, y) \to (X, Y)$, aber im allgemeinen nicht für $(x, y) = (X, Y)$. Ich führe E_0 wie in (10. 4) ein, d. h. ich setze $E_0 M = EM$ in $(b - d)$ und $E_0 M = \lim EM$ für $(x, y) \to (X, Y)$ für jede in $(b - d)$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $M = M(t)$, für die der angegebene lim existiert. Somit besteht, wenn f insbesondere stetig in b ist,

$$E_0 \int H \cdot f' dt' = \int EH \cdot f' dt' - f \quad \text{in } b. \tag{23. 3}$$

(Das gilt nicht für S anstatt H.)

II. Es gelten entsprechende Greensche Formeln für S_0'' und S'', ferner in den adjungierten Fällen. Denn E und $\widetilde{E}$ unterscheiden sich nur formal in den Koeffizienten A, B, C und $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ bei sonst gleichen allgemeinen Eigenschaften.

III. Die Integrale über ES, $\widetilde{ES}$ und dergleichen sind uneigentliche, bei denen im Integranden $R = 0$ auszuschließen ist. Im übrigen wird stets über b integriert, wenn nichts anderes vermerkt ist.

IV. Die Greenschen Formeln und die vorstehenden Zusätze gelten erst recht für P anstatt S_0 oder S, da alle eingeführten P von der Art wie H_0 sind. Somit gilt Nr. 11a II für P anstatt G.

e. Aus obigen verallgemeinerten Greenschen Formeln nebst Zusätzen und aus den Eigenschaften von P folgere ich die *Eigenschaften von* $\int P \cdot F' dt'$ *und ähnlichen Integralen*, wobei F' die Eigenschaften (10. 2), die ich in Nr. 20b VI wiederholt habe, besitzen soll. Insbesondere beweise ich, daß $\int P \cdot F' dt'$ die

Eigenschaften (10. 10, 9, 4, 5) und daher erst recht (10. 6, 3, 4, 5) an Stelle von U besitzt. Somit wird nebenbei gezeigt, daß Nr. 11 a IV auch für P anstatt G gilt. Man setze nachfolgend bei eckigen Ausgangsbereichen $E = \Delta + T$ und $Q = R$.

I. Ist $L = L(t)$ irgendeine beschränkte und integrierbare Funktion, so genügen $\int P \cdot L' dt'$ und damit $\int P \cdot F' dt'$ der Randeigenschaft (10. 10) wie U. — Das geht aus $\int \log(1 + J_v : R) dt' \lessgtr J_v$ hervor.

II. $\int P \cdot F' dt'$ befriedigt (10. 9) wie U. — Denn das gilt von beiden Integralen auf der rechten Seite von

$$4\pi \cdot \int P \cdot F' dt' = \int (4\pi \cdot P + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})) \cdot F' dt' - \\ - \int \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt'$$

(insbesondere vom letzten Integral wegen Nr. 20 b VI).

III. $\int P \cdot F' dt'$ erfüllt (10. 4) wie U. — Das ergibt sich aus

$$E \int P \cdot F' dt' = \int EP \cdot F' dt' - F \text{ in } (b - d).$$

IV. $\int P \cdot F' dt'$ genügt (10. 5) wie U; dann ist auch $\widetilde{E}_0 \int P \cdot F' dt'$ von der Art wie F in b. — Denn beide Integrale auf der rechten Seite von

$$4\pi \cdot E_0 \int P \cdot F' dt' = \int E(4\pi \cdot P + \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime})) \cdot F' dt' - \\ - \int E \log(Q^2 + Q^{2\prime\prime}) \cdot F' dt' - 4\pi \cdot F$$

sind von der Art wie F (insbesondere das letzte Integral wegen Nr. 20 b VII).

V. $\int EP \cdot F' dt'$ und $\int \widetilde{E} P \cdot F' dt'$ haben die gleichen allgemeinen Eigenschaften wie F in b. — Das folgt wegen

$$\int EP \cdot F' dt' = E_0 \int P \cdot F' dt' + F \text{ in } b$$

aus III und IV.

VI. Ist $M = M(t)$ eine Funktion, welche die Eigenschaften (10. 10, 9, 4, 5) wie U hat und sonst beliebig ist, so hat auch $\int \widetilde{E}' P \cdot M' dt'$ diese Eigenschaften. — Das ergibt sich aus

$$\int \widetilde{E}' P \cdot M' dt' = \int P \cdot E' M' dt' + M \text{ in } b$$

wegen I bis IV für $E_0 M$ anstatt F.

VII. $\int \widetilde{E}' P \cdot F' dt'$ ist von der Art wie F. — Das folgt aus Nr. 20 b VIII. (Hier läßt sich eine Greensche Formel nicht anwenden.)

(Eingegangen am 14. 1. 1941.)

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
Printed in Germany

42/11